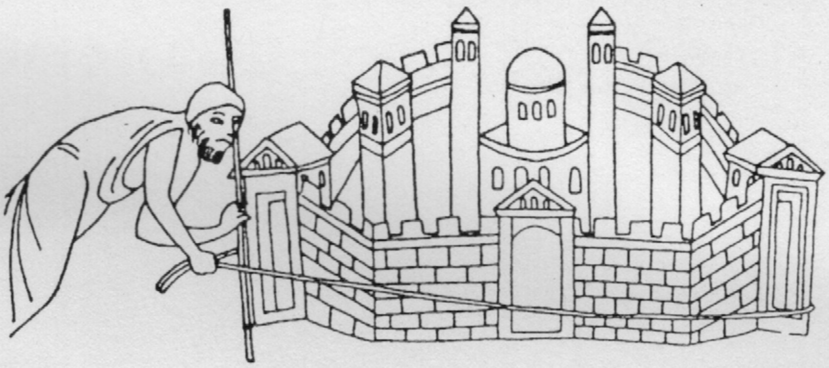
Helmut Minow

Vermessungen mit der Zwölfknotenschnur

und andere historische Konstruktionen mit dem Meßseil



Dortmund 1992

SCHRIFTENREIHE DES FÖRDERKREISES
VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.

Band 19

Helmut Minow

Vermessungen mit der Zwölfknotenschnur
und andere historische Konstruktionen mit dem Meßseil

Dortmund 1992

Herausgegeben vom Förderkreis Vermessungstechnisches Museum e.V.
Postfach 10 12 33, D - 4600 Dortmund 1

Anschrift des Verfassers:
Dipl.-Ing. Helmut Minow, Kelchstraße 11, D - 4600 Dortmund 30

Inhalt

Einleitung

In der Literatur zur Vermessungsgeschichte wird öfter darauf hingewiesen, was sich mit Meßschnüren oder mit dem Meßseil alles abstecken und vermessen läßt [12], [17], [4]. Der Schnur bzw. dem Seil als selbständiges Meßinstrument wird jedoch nicht die gebührende Beachtung geschenkt. Auf dem Bauplatz verwendet man die Schnur praktisch heute noch als Hilfsmittel zum Ausspannen der Mauerfluchten und in Form der Lotschnur als eigenständiges Meßinstrument. Richtig gehandhabt, lassen sich nämlich mit Schnüren ohne Hilfe anderer Meßinstrumente und ohne mathematische Formeln die kunstvollsten Grundrisse abstecken, und zwar alle Entwürfe, die auf dem Reißbrett mit Lineal und Zirkel konstruiert worden sind.

Daß schon in der menschlichen Frühgeschichte, spätestens jedoch seit der Antike, Bauwerke mit der Schnur abgesteckt worden sind, gilt als sicher. Vermutlich kann die Schnur als das eigentliche "Ur-Vermessungsinstrument" angesehen werden. Schon sehr früh müssen für bauliche und vermessungstechnische Zwecke Meßseile als Hilfsmittel Verwendung gefunden haben, wobei die Schnur entsprechend einem Grundmaß in gleichen Abständen mit Knoten markiert war. Dazu haben sich besondere Verfahren als Schnur- oder Seil-Geometrie entwickelt, die man auch als "Rezept-Geometrie" bezeichnen könnte [7]. Zudem waren die Grundsteinlegung und das Ausspannen des Schnurgerüstes von jeher feierliche Akte in Gegenwart der Herrscher und der Priesterschaft, so z.B. bei den alten Ägyptern [9] und in Indien [19].

Das Seil bzw. die Schnur selbst mußten aus einem Material hergestellt sein, das möglichst maßhaltig ist. In der Antike kannte man Schnüre aus Hanf, Flachs, Leinen oder Werg, aber auch gedrehte Seile aus Binsen, Stroh, Papyrus oder Palmfaser. Solche Seile, die meist dicker als die Schnüre waren, wurden auch in erheblichen Längen hergestellt. Welches Material bei der Herstellung von Meßseilen Verwendung fand, ist nicht bekannt.

Daß Messungen mit dem Seil oder mit der Schnur auch ihre Tücken haben, so z.B. wegen des Durchhängens der Schnur oder der Krümmung bei Seitenwind, dürfte schon früh erkannt worden sein. Kleine Abweichungen bei den abgesteckten Bauwerken lassen sich vielleicht durch die Elastizität der Seile erklären. Dazu ein Tatbestand aus dem europäischen Mittelalter, wo sich hauptsächlich die Feldmesser des Meßseils bedienten. Über die Meßgenauigkeit eines solchen Meßseils äußerte sich ausführlich der Nürnberger Stadtbaumeister Endres Tucher [13]:

> *"Von dem tagwerck seil. So hab ich, als ich paumeister worden pin, gefunden auf der Peunt (Bauhof) ein altz tagwerck seil, das gar von einem alten pauren, der vill jar darmit gemessen hat, der das der stat gegunt und übergeben... Ob nun iemant an einem seil die leng nemen und abmessen wolt, so soll man des geflissen sein, das man die leut warn, die solichs begeren, das sie das Moß mit keinem newen seil nemen, es wer dann, das das in sunderheit darzu gemacht worden were, oder das das vor gar woll gestreckt und der trodel daraus komen were; dann es felet sust gar sere, das das seil auß einander geet und sunderlich, ob man damit messen wurd auf einer wisen oder acker, die naß oder darauf der taw lege, so geet das seil ser ein. in dem allen muß man sich versehen oder leut, die darvon ein meß nemen wolten, darvor warnen."*

Die Länge des Seiles ist nicht genannt. Ein Tagwerk umfaßte in Nürnberg 320 Fuß mal 160 Fuß.

1 Mit Lineal und Zirkel, Meßseil oder Schnur

Mit Lineal und Stechzirkel eine geometrische Konstruktion auszuführen, ist eine alte griechische Forderung. Ausgesprochen hat sie wohl zuerst Platon (427-347 v.Chr.), der "die Trübung der mathematischen Reinheit" durch andere Zeichenmittel und mechanische Verfahren getadelt habe, wie Plutarch um 100 n.Chr. berichtet [7]. Das Mittelalter hat dann von der Antike die Geometrie euklidischer Art übernommen. Nachdem die "Elemente" des Euklid (ca. 365-300 v.Chr.) zunächst nur in griechischer Sprache veröffentlicht worden waren, wurden sie um 1550 durch den Buchdruck einem weiteren Kreis von Interessenten, wie Baumeistern und Feldmessern, zugänglich gemacht. Auch die heutige Schul-Geometrie ist an der euklidischen Konvention ausgerichtet, daß für die zeichnerische Konstruktion nur das Lineal (welches bei A. Dürer noch "Richtscheit" hieß) und der Zirkel als Instrument zugelassen sind; es wird also nur mit Gerade und Kreis konstruiert.

Jede Zirkelbewegung auf dem Reißbrett läßt sich auf dem Feld, und zwar in beliebiger Größe, mühelos mit der Schnur nachvollziehen. Hier erweist sich die Schnur jedem anderen Instrument überlegen, wohl deshalb, weil auch der Zirkel als eine Spannvorrichtung für die Arbeit am Reißbrett zu verstehen ist. Sprachlich gehören Reißbrett, Reißschiene und Riß sowie reißen und ritzen zusammen. "Zirkel" wird aus dem lateinischen circulus (= kleiner Kreis) sowie dem griechischen kirkos mit der Bedeutung "Gerät zum Kreiszeichnen", abgeleitet [20].

Welchen Stellenwert der Mensch dem Umgang mit der Schnur beimaß, geht aus der Sinnübertragung dieser Begriffe zur Standortbestimmung seiner selbst in dieser Welt hervor. Die Schnur verhalf ihm zu gedanklichen Grundstrukturen und klarer Ausrichtung. Einige Hinweise zur Etymologie mögen dies verdeutlichen [20]. "Meßseil" und "Meßschnur" werden häufig synonym gebraucht. Das Wort "Seil" hängt mit der Sprachwurzel "sei" in der Bedeutung von "binden, Riemen, Strick" zusammen. Sprachlich abgeleitet wird das Wort "Schnur" vom althochdeutschen "snuor", das "Fäden verknüpfen" bedeutet. Am unmittelbarsten wird die Schnur im Wort "Linie" greifbar, das sich von lateinisch "linea" (= Leine, Schnur, Faden) ableitet. Linie ist mit "linum" (= Lein, Flachs) und dem deutschen "lin, lein" aufs engste verwandt. Spätestens im 15. Jahrhundert begegnet man der "Leine" in ihrer erstarrten Form von "Lineal".

Hierher gehört auch die Vorstellung von der ausgespannten "Richtschnur" oder das, was mit dem Adjektiv "schnurgerade" gemeint ist. Begrifflich verwandt mit der "Schnur" sind "Regel" (von lateinisch "regula" = Richtschnur, Richtholz, Maßstab) und "Norm" (von lateinisch "norma" = Richtschnur, Winkelmaß, Maßstab). Dem Wort "norma" wiederum liegt das griechische "gnomona" (= Richtschnur, Maßstab, Kenner, Beurteiler) zugrunde, das auch mit der "groma", dem Vermessungsinstrument der Römer in Verbindung gebracht wird. Das vertraute Winkelmaß bzw. der Winkelhaken ist - ähnlich dem Lineal - als erstarrtes Schnurgespann zu verstehen. Zudem ist zu vermuten, daß man sich unter "gnomona/norma" weniger die Winkel an sich vorzustellen hat, als vielmehr das fertig erstellte "Schnurgerüst", das auch die Winkel festlegt.

2 Harpedonapten im alten Ägypten

In der Antike mußten die Ägypter für eine korrekte Steuerveranlagung die gerechte Aufteilung der Felder und die Zuleitung der Bewässerung planen sowie deren Durchführung sichern. Dazu waren Felder, Wege und Kanäle auf der angeschwemmten Schlammebene regelmäßig neu einzumessen. Diese Feld- oder Landmessung nannten die Ägypter "Seilkunst", weil bei der Vermessung das Seil bzw. die Schnur das Hauptwerkzeug war. In einem erhaltenen Rest aus den Schriften des Demokritos (460 - 371 v.Chr.) gibt dieser einen Einblick in die antike Geometrie: *"Ich aber bin von meinen Zeitgenossen am meisten auf der Erde herumgekommen, wobei ich am weitgehendsten forschte, und habe die meisten Himmelsstriche und Länder gesehen und die meisten gelehrten Männer gehört, und in der Zusammensetzung der Linien mit Beweis hat mich noch keiner übertroffen, auch nicht* *die Landmesser (die sog. Harpedonapten) der Ägypter. Mit diesen bin ich nach allen anderen (?) fünf (?) Jahre, auf fremdem Boden zusammen gewesen."* (Nach Diels, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker, 6. verb. Aufl., 1952, II. Band)

Die Harpedonapten (Bild 1) waren besonders ausgebildete Leute, die mit dem Meßseil umzugehen wußten. Das griechische Wort "Harpedónaptai" wird als eine Zusammensetzung von harpedóne (= Seil, Schnur, Strick, Faden) und háptein (= heften, anknüpfen, anfassen) gedeutet, so daß es mit "Seilträger, Seilspanner" übersetzt werden kann. Wenn Demokritos sich mit den ägyptischen Landmessern vergleicht und er deren Wissensstand ungewollt lobt, so zeigt dies, daß die Harpedonapten nicht nur einfache Figuren mit dem Knotenseil konstruieren konnten. Sie waren demnach mit dem "Konstruieren von Linien, unter Erörterung der Beweise" betraut, was auf gehobene geometrische Kenntnisse hinweist.

Die ägyptischen Seilspanner, die nicht nur als Bauingenieure, sondern auch als Feldmesser auftraten, übten einen angesehenen Beruf aus. Bei der Errichtung von Bauwerken mußten sie den Grundriß aufschnüren. Daraus entwickelte sich eine richtige Seilmathematik. Aus verschiedenen Zeiten sind bildliche Darstellungen der Grundlegungen von Tempeln usw. überliefert. Dieser feierliche Akt hieß "das Fest des Seilspannens" (Bild 2). Auf einem Relief vom Tempel in Kom Ombo (ca. 150 v.Chr.) ist dargestellt, wie der König einen langen Pflock in die Erde schlägt (Bild 3). Ein gleiches tut ihm gegenüber die Göttin der Weisheit. Sie legt, das Meßseil haltend, die Eckpunkte des Heiligtums durch Pflöcke fest.

Demnach wurden im alten Ägypten die Bauwerke mit dem Spannseil abgesteckt und vermessen. Mit der Knotenschnur wurde der Rechte Winkel bei Bauwerken festgelegt. Waren die Grundwinkel gefällt, mußten oft bis zu 300 m lange Grundlinien, wie etwa bei den Pyramidenbasen, durchvisiert werden. Bei diesen frühen Vermessungen mit dem geknüpften Meßseil auf der Erde ging es auch um die Ausmessung bestimmter heiliger Bezirke aus dem allgemeinen grenzenlosen Raum, dem "Himmel"; die Meßvorgänge galten als heilige Handlungen [9].

Wie aber die Harpedonapten mit dem Seil eigentlich umgegangen sind, ist leider nicht bekannt. Ihr Wahrzeichen, das Seil, hatte, wie die Statue eines Feldmessers zeigt, eine beachtliche Länge. Wenn man sich die Erfordernisse der regelmäßigen Aufteilung und Flächenbestimmung eines ebenen und natürlich begrenzten Geländes vorstellt, wird man sich den damaligen Seilhandhabungen wohl realistisch annähern. Bei Reststücken z.B. bot sich das Dreieck an, das zur Flächenberechnung in zwei rechtwinklige aufzuteilen wäre. Ein Flußbogen konnte mit dem Kreis erfaßt werden, der mit der Seilschlaufe leicht gezogen war. Damit kommt schon eine Reihe von einfachen Grundkonstruktionen der Geometrie zusammen, wie etwa Herstellen eines Rechten Winkels, Fällen eines Lotes auf eine Seite, Halbieren einer Strecke, Abstecken eines Dreiecks oder eines Kreisbogens mit Sehne. Alle diese Konstruktionen wurden an Ort und Stelle in beträchtlichen Abmessungen in originaler Größe realisiert und mit den gespannten Seilen auf der Schlammebene abgedrückt und damit "gezeichnet". Entlang der Zeichnung oder auch der gespannten Seile konnten dann die Baumaßnahmen durchgeführt werden.

Die Notwendigkeit, die Senkrechte abzustecken, hat nun Moritz Cantor [3] zu der Vermutung verleitet, diese sei durch die Konstruktion eines Schnurdreiecks mit den Seiten 3 : 4 : 5 gefunden worden. Aber nichts in den ägyptischen Urkunden läßt diese Annahme als gesichert erscheinen; es fehlt jede Nachricht, in welcher Weise die Senkrechte gefunden wurde. Die größte Wahrscheinlichkeit spricht für die Symmetriekonstruktion des Rechten Winkels: In einem Punkt einer Geraden das Lot zu errichten, mußte so erfolgen, daß von diesem Punkt aus mit dem Seil nach beiden Seiten gleiche Stücke abgeteilt und markiert wurden. Dann ermittelte man von den Markierungen aus die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks und damit einen zweiten Punkt des Lotes. Am einfachsten ließ sich diese letztere Operation so ausführen, daß man ein längeres Seil mit den Enden in den beiden Markierungen befestigte, es dann in der Mitte ergriff und spannte.

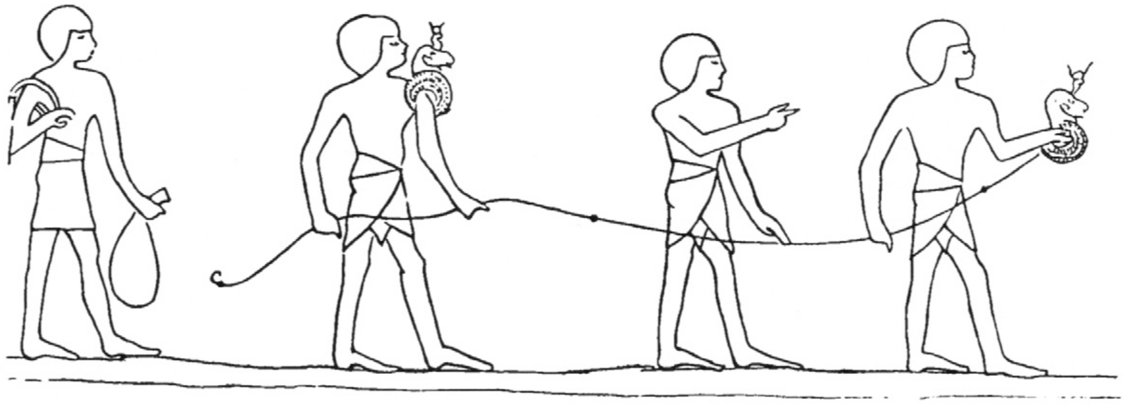


Bild 1
Szene mit Seilspannern. Grab des Amenhotpe-si-se bei Theben.
Um 1420 v.Chr. Umzeichnung

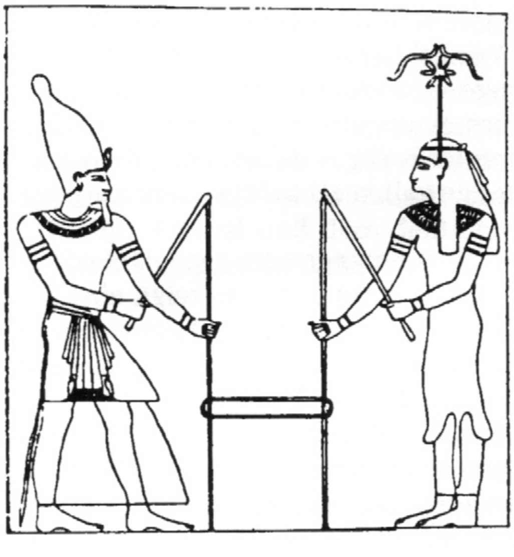


Bild 2
Fest des Seilspannens. Darstellung aus dem Tempel von Dendera.
Um 1300 v.Chr. Umzeichnung

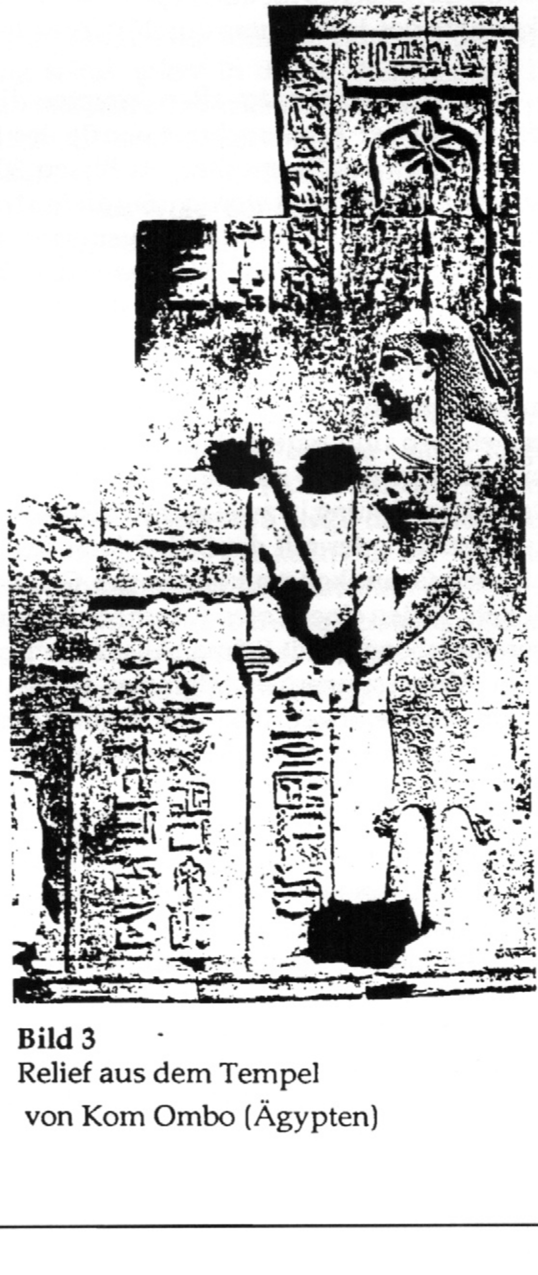


Bild 3
Relief aus dem Tempel von Kom Ombo (Ägypten)

Allerdings liegt bei dem allgemeinen Stand der ägyptischen Geometrie und dem Vorkommen von vier pythagoreischen Zahlengruppen, die sich alle auf die Gruppe 3 : 4 : 5 zurückführen lassen, auch die fragliche pythagoreische Konstruktion durchaus im Bereich der Möglichkeit. Beschrieben ist ein derartiges Verfahren weder bei den Ägyptern noch bei den Babyloniern; aber auch kein anderes [17].

3 Schnur-Regeln in Indien und in China

Als Quelle mathematischer Gelehrsamkeit bei den Indern im Altertum gelten die Schnur-Regeln (sulva-sutras). Obwohl erst um 200 n.Chr. aufgezeichnet, wurden die sulva-sutras bereits im 4. Jahrhundert v.Chr. abgefaßt; die Lehren selbst könnten jedoch viel älter sein; denn schon in Schriften aus der Zeit um 2000 v.Chr. findet sich eine Bemerkung über "kundige Männer, die den Altarplatz ausmaßen". Die Schnur-Regeln beschäftigen sich im wesentlichen mit der Absteckung der Grundrisse und der Form von Altären, die alle auf eine Grundform, den "siebenfachen Altar", zurückgehen (eigentlich: siebeneinhalbfacher Altar; denn seine Fläche betrug 7½ Quadrat-Paurusha. 1 Paurusha = 2.26 m). Ein solcher Altar hatte in groben Umrissen die Gestalt eines Falken [4].

Als Meßgerät wurde die Schnur (sulva) benutzt. Über ihr Material ist nichts Genaues gesagt; vielleicht wurden Binsen oder Schilf verwendet. Die Schnur war mit Marken versehen; außerdem enthielt sie Schlaufen, die dazu dienten, die Schnur an Pflöcken zu befestigen, um z.B. Kreise ziehen zu können. Bei diesen Meßmethoden zeigten die Inder große Geschicklichkeit, die hauptsächlich auf der vielseitigen Anwendung einfacher geometrischer Gesetze beruhte.

Um eine Senkrechte von einem Punkt C einer gegebenen Linie EF abzustecken (Bild 4), geben die sulva-sutras folgende Anleitung: Mit der Schnur werden auf der Linie EF von Pflock C aus gleiche Strecken CA und CB abgesteckt. Dann wird eine Schnur, die länger als die Strecke AB ist, durch ihr Zusammenlegen halbiert und der Teilungspunkt D gekennzeichnet. Diese Schnur wird in A und B befestigt und gespannt. Wenn die Lage von D im Gelände verpflockt ist, ergibt CD die gewünschte Senkrechte. Dieselbe Methode findet sich übrigens später (1618) bei Schwenter [18].

Ist das Meßseil nicht gleichmäßig geteilt, so läßt sich die Länge 4 durch einmaliges und der Teilungspunkt 3 : 5 durch dreimaliges Zusammenlegen ermitteln. Diese Methode wird bei den Indern umständlich so beschrieben (Bild 5): Man stecke von einem gegebenen Punkt F aus auf einer gegebenen Linie eine Strecke FG ab. Man nehme dann ein Seil AB, das zweimal so lang ist wie die Strecke FG. Durch Halbieren findet man den Punkt C auf dem Seil AB. Weiteres zweimaliges Halbieren von AC ergibt den Punkt D = ¼ AC. Wenn also FG als Maßeinheit genommen ist, dann ist AD $^3/_4$ und DB = $^5/_4$ von FG. Wenn das Seil in F und in G befestigt und als Dreieck gespannt ist, ergibt HF die gewünschte Senkrechte [19]. Es handelt sich auch hier wieder um das pythagoreische Dreieck 3 : 4 : 5.

Der Messungsvorgang beim Abstecken eines vedischen Altars ging ebenfalls nach einem in den sulva-sutras genau vorgeschriebenen Ritual vor sich. Es handelte sich wiederum um eine schematische Tätigkeit, deren Theorie schon vorher festgelegt war ("Rezeptgeometrie"; Bild 6). Man bediente sich eines Meßseils aus "Binsen" von zwei Paurusha Länge, das halbiert (1-0-1) und dann in ½, $^1/_5$ und $^1/_{10}$ unterteilt sowie mit Marken (a...e) versehen war. Bei 1 waren Schlaufen angebracht. Nach Festlegung der Ost-West-Achse wurde zunächst rechtwinklig dazu die Südrichtung bestimmt. Die Zahlen in der Darstellung geben die weitere Reihenfolge an, in der die Pflöcke eingeschlagen wurden. Sie zeigen so die allmähliche Entstehung des Altargrundrisses. Das gleiche wiederholte sich bei dem symmetrischen, nördlichen Teil des sakralen Bauwerks [4].

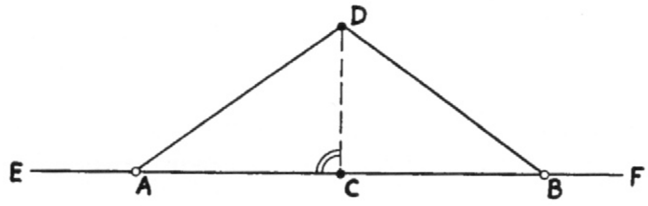


Bild 4

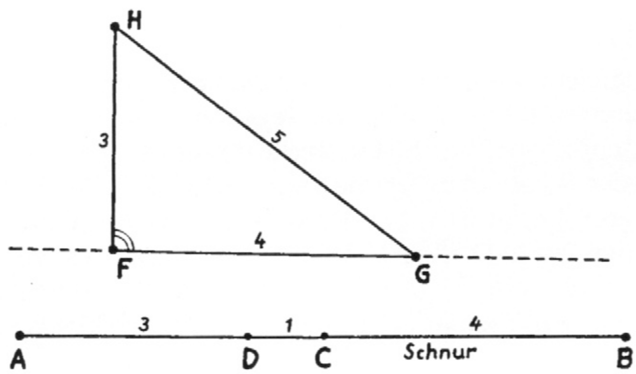


Bild 5

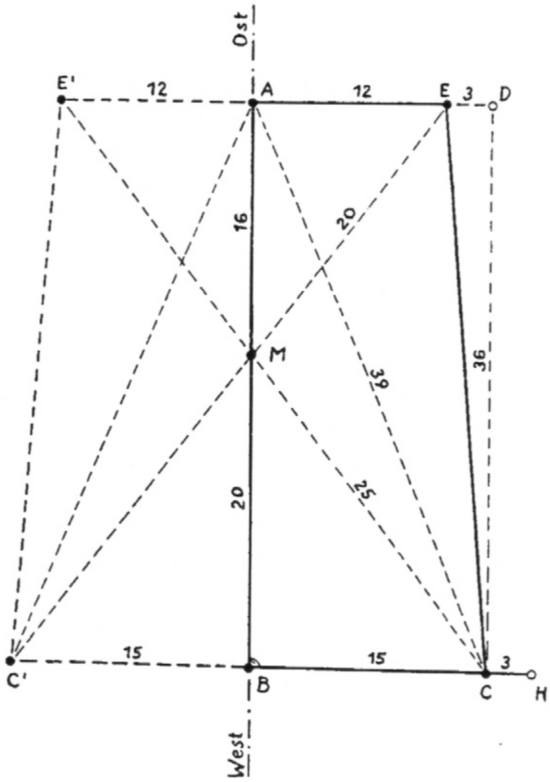


Bild 7
Absteckung eines trapezförmigen indischen Altars

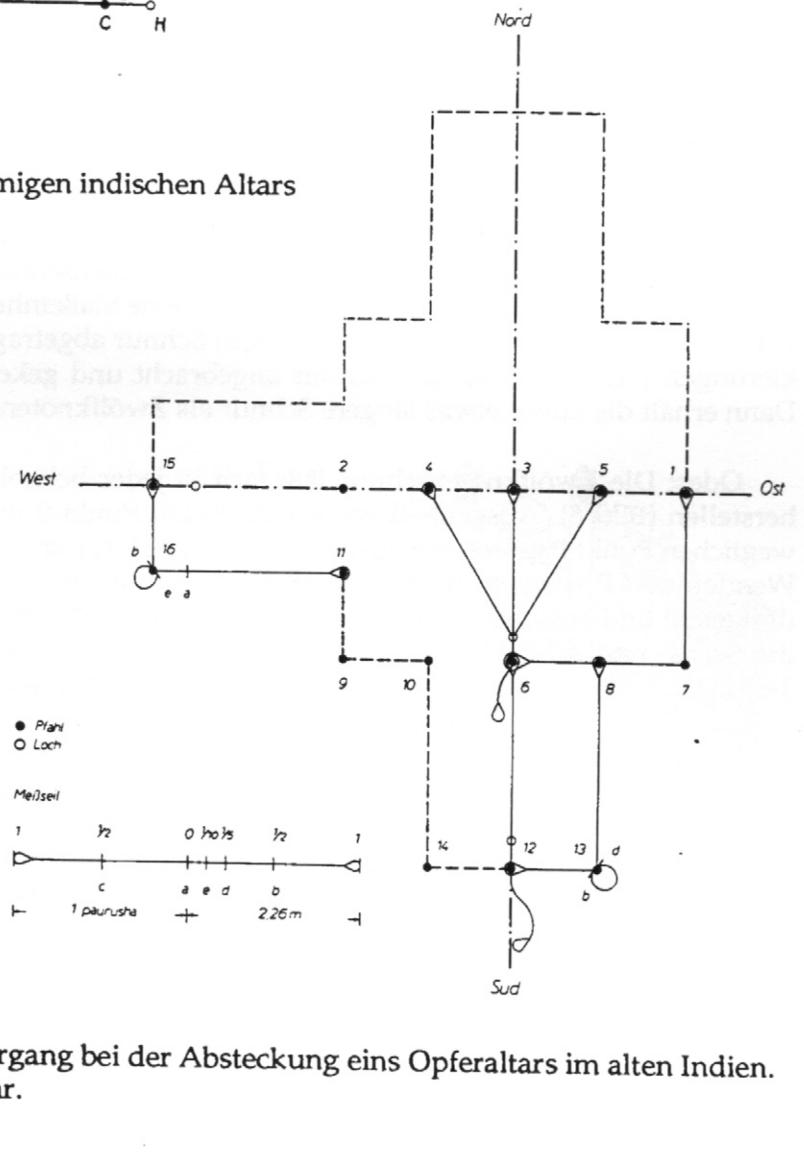


Bild 6
Messungsvorgang bei der Absteckung eins Opferaltars im alten Indien.
Um 300 v.Chr.

Als weiteres Beispiel diene die Absteckung eines trapezförmigen Opfer-Altars mittels des Dreiecks 15 : 36 : 39 (Bild 7). Die Vorschrift lautet: "Man nimmt eine Schnur von der Länge des Maßes AB (der ost-westlich verlaufenden Achse des Altars; Länge meist 36), verlängert sie um ihre Hälfte (36 + 18 = Gesamtlänge 54) und bringt dann, um $^1/_6$ dieser Verlängerung H (= 3) von der Ansatzstelle entfernt, ein Zeichen C an (also Teilung in 39 + 15). Hierauf befestigt man die beiden Enden der verlängerten Schnur an den Enden der Strecke AB, zieht die Schnur an dem Zeichen C nach Süden (Dreieck ABC) und macht da, wo sie den Boden berührt, ein Zeichen. Auf dieselbe Weise ergibt sich Punkt D, der aber nur ein Hilfspunkt ist. Die eigentliche Altarecke E wird durch einen auf dem Seilstück AD = 15, bei 12 angebrachten Knoten gefunden." Ähnlich ist die Konstruktion des Dreiecks 3 : 4 : 5 (bzw. 12 : 16 : 20 oder 15 : 20 : 25) beschrieben, die wahrscheinlich zuvor durchgeführt wurde. Damit ist der Zweck, die östliche und die westliche Seite des Altars im Rechten Winkel zur Achse zu ziehen, erreicht. Diese nur mit einer gewissen Seillänge und ihren durch Zusammenlegen erhaltenen Teilen arbeitenden Verfahren geben ein Bild von dem rein praktischen, geometrisch-konstruktiven Charakter der sulva-sutras [19].

Auch bei den Chinesen wurde in der Vermessungstechnik das pythagoreische Dreieck 3 : 4 : 5 benutzt. Die Zahlenreihe 3, 4, 5 spielte bei ihnen außerdem eine religiös-mystische Rolle. Einige Andeutungen in der altchinesischen Literatur lassen vermuten, daß man die Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks auch in Seilkonstruktionen verwertete. So steht im Tschï-u-pi I (angeblich aus dem 12. Jahrhundert v.Chr.) das Wort "Seil" für die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck. Ferner wird dort eine "Figur des Seiles" erwähnt, in der das Dreieck 3 : 4 : 5 mehrmals vorkommt. Also auch in China scheint eine in zwölf Abschnitte geteilte Schnur verwendet worden zu sein.

4 Die Zwölfknotenschnur

Die zwölfteilige Knotenschnur (kurz: Zwölfknotenschnur) kann auf verschiedene Art hergestellt werden. Einmal so: Ein Grundmaß bzw. eine Maßeinheit (z.B. eine Elle, eine Rute, ein Fuß) wird zwölfmal auf einer ausreichend langen Schnur abgetragen, wobei die erforderlichen Markierungen ("Knoten") auf der Schnur angebracht und gekennzeichnet ("verknotet") werden. Dann erhält die zuvor etwas längere Schnur als Zwölfknotenschnur die endgültige Länge.

Oder: Die Zwölfknotenschnur läßt sich in jeder beliebigen Länge auch auf folgende Art herstellen (Bild 8). Ausgehend von einem festen Punkt 0 wird die Schnur 0-XII um einen beweglichen Punkt P gelegt, wieder nach 0 zurückgeführt und das Endstück XII darum gelegt. Der Wendepunkt P wird bis zum Zusammentreffen mit XII nach 0 hin bewegt. Die Länge wird so dreigeteilt und entsprechend markiert. Durch anschließendes zweifaches Zusammenlegen wird die Sechs- und schließlich die Zwölfteilung gewonnen. Abschließend wird die gleichmäßige Teilung der Meßschnur geprüft und die "Knoten" endgültig markiert.

Bei Bauwerksvermessungen kann nun mit der Zwölfknotenschnur als Meßinstrument das übertragen und abgesteckt werden, was zuvor als Entwurf auf dem Reißbrett mit Lineal und Stechzirkel "aufgerissen" wurde. Der Begriff "Knoten" kann übrigens in diesem Zusammenhang als Maß der Länge angesehen werden. Denn in der Schiffahrt wird beim Auswerfen der Logleine anhand der abspulenden, als Knoten eingeknüpften, Marken die Fahrt der Schiffe gemessen und entsprechend in "Knoten" angegeben (1 Knoten = 1 Seemeile = 1,85 km).

5 Traditionen im europäischen Mittelalter

Beim Bau mittelalterlicher Kirchen wurden für den Grundriß auch Figuren der klassischen Geometrie verwendet, die als symbolisch bedeutungsvoll galten. Es waren dies vor allem die

Bild 8

Bild 9

Bild 10

Bild 11

regelmäßigen Vielecke vom Dreieck bis zum Zwölfeck. Nach den von der Antike übernommenen Vorstellungen des Mittelalters bilden diese geometrischen Formen die kosmische Ordnung ab: der Kreis z.B. die Einheit Gottes, das gleichseitige Dreieck die Trinität, das Quadrat die Harmonie der Schöpfung.

Eine allegorische Darstellung der "Arithmetica" mit der Meßschnur auf dem Bauplatz (Bild 9) läßt erkennen, daß man auch im europäischen Mittelalter mit der Zwölfknotenschnur noch praktisch umzugehen wußte. Allerdings hält die "Arithmetica" eine Knotenschnur mit 24 Einheiten in Händen. Diese Darstellung stammt aus dem "Hortus deliciarum", einer Enzyklopädie des damaligen Wissens (lateinisch verfaßt um 1180 von der Äbtissin Herrad von Landsperg).

Eine weitere Bildquelle, wie ein Kirchengrundriß mit Hilfe von Schnüren und Pflöcken festgelegt wurde, findet sich in einer Buchmalerei des 12. Jahrhunderts (Vie de St. Hugues, Paris, Bibl.Nat., Ms.Lat. 17716, fol. 43). In der Miniatur trägt ein Heiliger die Seilrolle; die "oberhalb" der Heiligen gespannten Seile verlaufen etwa parallel und etwa rechtwinklig zueinander [8].

In der ehemaligen Burgkapelle St. Klemens in Schwarzrheindorf bei Bonn befinden sich im südwestlichen Teil des Kreuzgradgewölbes der Unterkirche einige romanische Fresken aus dem 12. Jahrhundert, überwiegend nach Motiven aus dem Buch des Propheten Hesekiel (40, 3-5; 42, 15-20). Ein Motiv stellt einen Feldmesser oder Baumeister dar, der mit Meßseil und Meßlatte an einem Stadttor lehnt (Bild 10). Ein anderes Motiv (Bild 11) veranschaulicht, wie mit einer Meßschnur die Ringmauer eines Bauwerks vermessen wird [8].

Ferner zeigt im Zisterzienser-Kloster von Alcobaça (nordöstlich von Lissabon) ein Azulejo-Kachelbild die Darstellung der Zwölfknotenschnur und die Absteckung des Rechten Winkels mit den Seiten 3 : 4 : 5 im Verständnis des portugiesischen Barocks.

Selbstverständlich war auch die einfache Meßschnur den Feldmessern und Baumeistern bekannt, wie schon ihr Vorkommen in frühen vermessungstechnischen Werken des europäischen Mittelalters beweist. Leonardo Pisano gen. Fibonacci (ca. 1180-1250), in dessen praktisch-feldmesserischen Lehren auch römische Überlieferung enthalten ist [11], beschreibt eine Methode, durch Seilspannen eine Senkrechte von einem Punkt auf eine Gerade zu fällen. Bei Leone Battista Alberti [1], einem Architekten des 15. Jahrhunderts, und dann in der praktischen Geometrie des Johann Gutmann [5] wird das Seil-Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 verwendet.

Schnüre mit anderen Seitenverhältnissen, z.B. 20, 21, 29, sind in dem Lehrbuch von Erasmus Reinhold [15] zur Prüfung der Rechten Winkel von Grundstücken benutzt. Ähnlich wird in der Geometria Culmensis [14] um 1400 zu dem gleichen Zweck empfohlen, die Schenkel des Winkels sowie die Diagonale mit der Schnur zu messen und den Satz von den Quadraten anzuwenden. Es heißt dort u.a.: ***"Exempil, is sy eyn gere a b c, dy want a b sy 21, a c 28, b c 35...", (d.h. $21^2 + 28^2 = 35^2$), "Dorus man sal wyssen, das der gere vorgelegit yst rechtwinkelik, alz man hy sehen mak yn desir figuren."*** - Das Buch enthält außer dem deutschen Text mit der sonderbaren Orthographie auch eine lateinische Übersetzung, die sich an das im Mittelalter verbreitete Lehrbuch "Practica Geometriae" 1346 von Domenicus Parisiensis anlehnt. Ähnliches findet sich auch bei Schwenter [18]: Man nimmt eine Zwölfknotenschnur. Mit den Marken 3, 7 und XII spannt man von A aus ein Dreieck ABC. AB ergibt dann die Senkrechte zu AE (Bild 12). Auch viel später noch, z.B. bei Bion (um 1700) wird dieses Verfahren gelehrt [2].

Eine etwas andere, sicher ebenfalls alte Methode bei der Fällung des Lotes von einem Punkt P beschreibt wiederum Schwenter [18]: Er schlägt mit der Schnur um zwei beliebige Punkte (A und B) einer Geraden (mit verschiedenen Radien) Kreise, die sich in dem gegebenen Punkte P schneiden. Ihre gemeinschaftliche Sehne ist die gesuchte Senkrechte C-P (Bild 13).

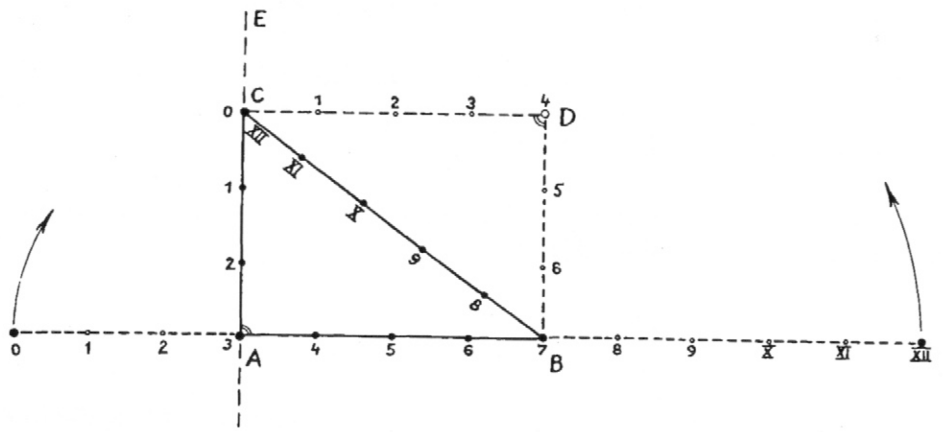


Bild 12

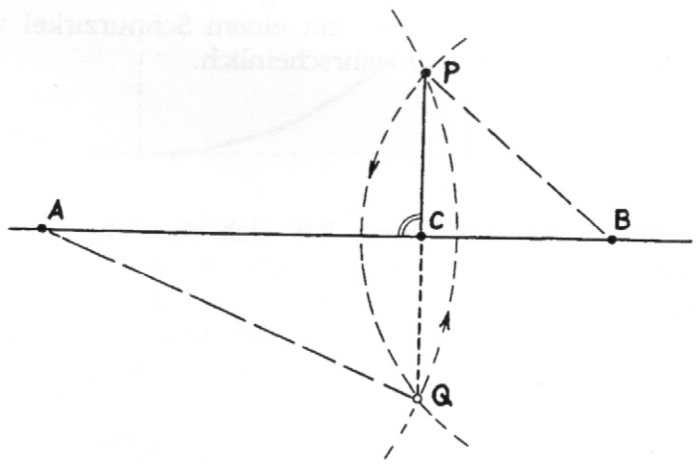


Bild 13

6 Praktische Beispiele mit der Meßschnur

Die Gerade und der Kreis sind die einzigen "Linien", die leicht und elementar zu zeichnen und im Gelände abzustecken sind. Gerade und Kreis wurden schon in der Antike als die beiden Urkurven angesehen: die Gerade als die "geradeste" und der Kreis als die vollkommen runde Kurve.

Das Wort "Linie" hat, wie schon erwähnt, die alte Darstellungsweise mit der Schnur bewahrt; sie ist die (ausgespannte) "leinene" Schnur und bedeutet ursprünglich nur die Gerade, worauf ja auch das abgeleitete Wort "Lineal" hinweist.

Anhand der folgenden Beispiele soll gezeigt werden, wie sich die Meßvorgänge mit der Schnur praktisch abgespielt haben dürften.

6.1 Kreis

Der Kreis kann mit einer straff gespannten Schnur gezogen werden, die in einem Endpunkt fest ist und deren anderes Ende "herumgetragen" wird (griechisch periphérein, davon Peripherie; Bild 14). Sein Zentrum (griechisch kéntron) ist ursprünglich der "Stab, Stachel", mit dem man das Zugtier antrieb und den man in die Erde steckte, das Tier daran band und es "im Kreis" herum weiden ließ. Auch in dem Wort "Kreis" klingt noch dessen Erstellung mit dem Seil nach; althochdeutsch Kreiz bildet das Verb krizen "einen Kreis aufreißen", d.h. (in die Erde) ritzen. Altnordisch reitr ist die eingeritzte "Furche". Verwandt sind englisch write ("schreiben") sowie "reißen" und "kritzeln" [20].

Die Absteckung eines Kreises ist also ein elementarer (einfacher) Vorgang. Besonders an der Baustelle war der "Schnurzirkel" nicht zu entbehren. Um einen Festpunkt wurde der Kreis mit einer Seilschlaufe gezogen; aus ihr mag die Verwendung von Seilen und Schnüren in der Bauvermessung hervorgegangen sein. Daß man aber mit einem Schnurzirkel von beliebig großer Spannweite arbeiten konnte, ist allerdings unwahrscheinlich.

6.2 Ellipse

Eine andere gekrümmte Linie, die Ellipse, läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Schnur in den Erdboden ritzen. Das Verfahren wird heute noch z.B. im Gartenbau praktiziert. Dabei werden die Festpunkte L und R durch zwei Pflöcke markiert (Bild 15). Der Abstand 2e kann den Erfordernissen entsprechend gewählt werden. Um die beiden Pflöcke wird eine in sich geschlossene Schnur (Seilschlaufe) der Länge $2a > 2e$ gespannt, die zunächst mit einem dritten (beweglichen) Pflock P' ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Pflock P, der die Schnur spannt, bewegt sich auf einer Ellipse. Die Höhe b des Dreiecks ist zugleich die kleine Halbachse der Ellipse. Aus der großen Achse (2a) der Ellipse plus 2e ergibt sich die Gesamtlänge der Seilschlaufe. Für jeden Punkt der Kurve ist dabei die Summe der Entfernungen von den beiden Festpunkten ($LP + RP = 2a$) konstant. Außerdem ist $e^2 = a^2 - b^2$. Die Form der Ellipse ist durch zwei der drei Größen a, b und e bestimmt, etwa durch das Rechteck mit den Seiten 2a und 2b. Wenn $b = a$, wird das Rechteck zum Quadrat und die "Ellipse" zum Kreis (Bild 14).

Aus der Kombination von halber Ellipse und Halbkreis lassen sich auch eiförmige Kurven (Ovale) konstruieren (Bild 16). Schon bei frühgeschichtlichen Bauwerken (Steinsetzungen) können außer Kreisen auch solche Eilinien nachgewiesen werden, z.B. in Stonehenge (England) und bei Carnac (Frankreich).

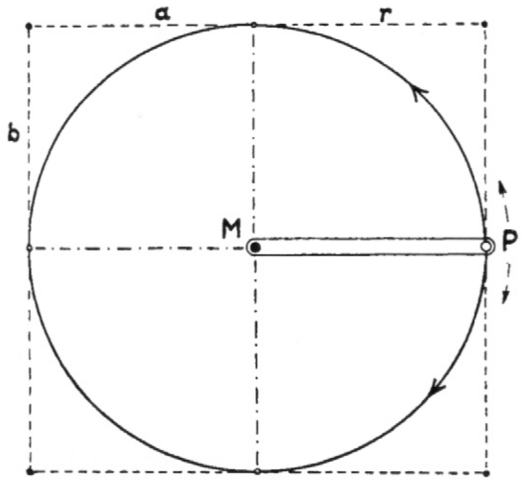


Bild 14

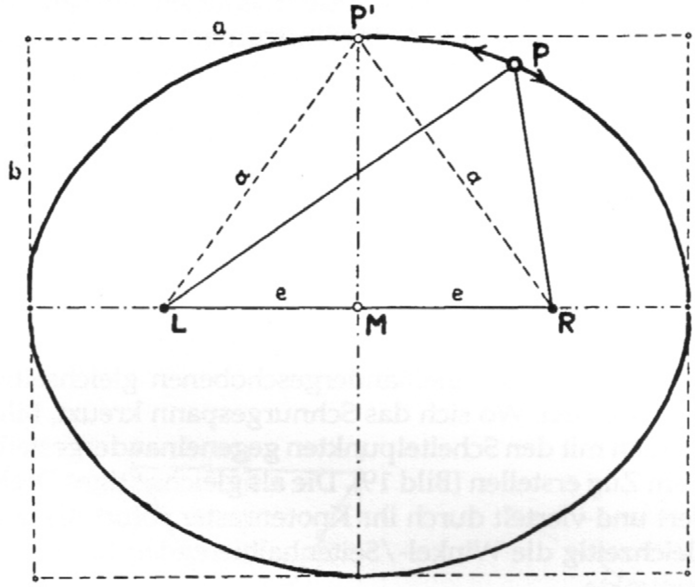


Bild 15

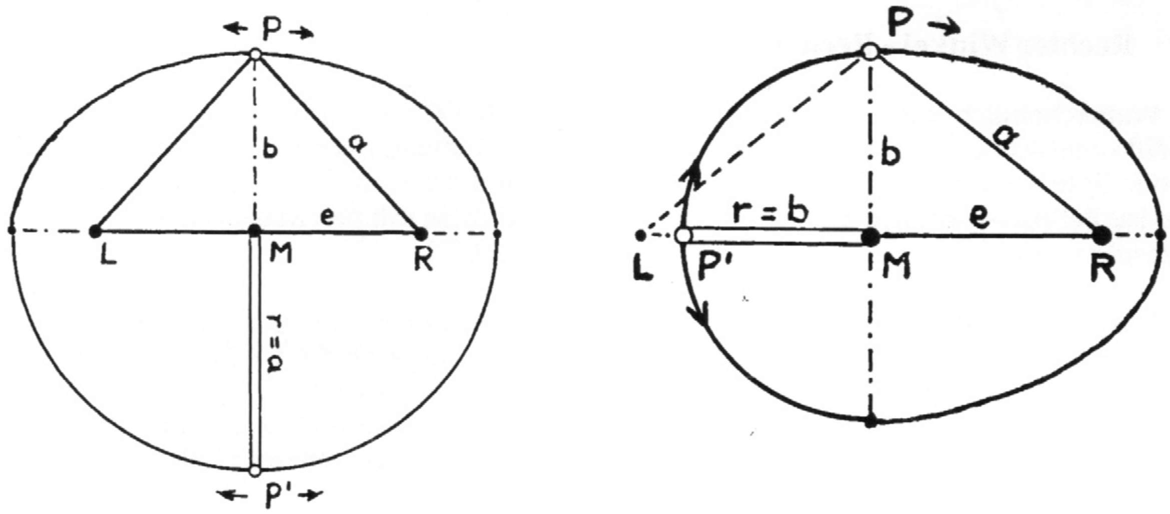


Bild 16

6.3 Gleichseitige Dreiecke

Ein weiterer simpler Absteckunsvorgang läßt sich mit dem gleichseitigen Dreieck erzielen. Um die Möglichkeiten aufzuzeigen, die sich hiermit eröffnen, sollen zunächst einige scheinbar banale Selbstverständlichkeiten kurz hervorgehoben werden.

Das gleichseitige Dreieck kann als die einfachste und stabilste, aus sich selbst heraus definierte geometrische Grundform bezeichnet werden. Es läßt sich ohne weitere Hilfsmittel im Feld aus drei gleich langen Geraden (Schnüren) und ebenso auf dem Reißbrett durch Zirkelschlag gewinnen. Es weist damit engste Bezüge zum Kreis auf. Die dabei auftretenden Winkel von 60° bzw. 30° und 90° sind klassische Kreisteiler. Die Vielfalt an inneren Bezügen erbringt eine Fülle an Kombinationsmöglichkeiten. Weitere praktische Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Nachdem die Seitenlänge eines zu erstellenden Gebäudes durch Meßpflöcke (A und B) festgelegt ist, die gleichzeitig auch die Basis des gleichseitigen Dreiecks bildet, werden drei Schnüre der Länge AB abgemessen (Bild 17). Durch einfaches Zusammenlegen werden deren Mitten (2, 6, X) bestimmt und markiert. Sie bilden das eigentliche Meßinstrument. Ausgehend von der abgesteckten Basis A-B werden die drei Schnüre, die sich an den Enden berühren, ausgespannt und so das gleichseitige Dreieck ABC gewonnen. Mit dem gleichseitigen Dreieck sind auch die seitenhalbierenden Hilfspunkte 2, 6 und X fixiert. Sie werden ebenfalls verpflockt. Die Höhe C-2 des Dreiecks entspricht der künftigen Breite des Gebäudes. Dank der Hilfspunkte wird es möglich, das "Gegendreieck" A'B'2 zu erstellen. Die Absteckung des Gebäudegrundrisses läßt sich auch in einen Arbeitsgang zusammenfassen, sofern die Zwölfknotenschnur zur Verfügung steht. Es müssen dann lediglich die entsprechenden Berührungs- und Hilfspunkte zur Deckung gebracht werden (Bild 17).

Mit der Zwölfknotenschnur lassen sich die beiden ineinandergeschobenen gleichseitigen Dreiecke wiederum in einem Arbeitsgang erstellen. Wo sich das Schnurgespann kreuzt, bilden sich Kontrollpunkte (Bild 18). Auch die beiden mit den Scheitelpunkten gegeneinandergestellten gleichseitigen Dreiecke lassen sich in einem Zug erstellen (Bild 19). Die als gleichseitiges Dreieck ausgespannte Zwölfknotenschnur halbiert und viertelt durch ihr Knotenraster sofort die Seiten und damit auch die Höhe und liefert gleichzeitig die Winkel-/Seitenhalbierenden (Bild 20). Es bildet sich ein ganzes Netz neuer Bezugspunkte.

6.4 Rechter Winkel - Rechteck

Wahrscheinlich war lange vor Pythagoras (ca. 540-500 v.Chr.) bekannt, daß sich mit der Zwölfknotenschnur ein Rechter Winkel aufreißen läßt. Pythagoras erbrachte der Überlieferung nach lediglich den rechnerischen Beweis dafür, während der nach ihm benannte Lehrsatz selbst älter ist. Bei Anwendung der Zwölfknotenschnur wird diese mit den Markierungen 3, 7 und XII so gespannt, daß bei A ein Rechter Winkel entsteht (Bild 12).

Durch Anhängen eines weiteren rechtwinkligen Dreiecks kann ein Rechteck gebildet werden. Die gemeinsame Hypotenuse BC der beiden Dreiecke ist zugleich die Diagonale des Rechtecks ABDC. Das Rechteck bildete oftmals den Grundriß für sakrale Bauwerke, besonders für Tempel. Das Wort "templum" läßt sich übrigens am besten als "(mit dem Meßseil) ausgeschnittenes Stück" übersetzen (von griechisch témnein = schneiden; témenos = abgegrenztes Gut).

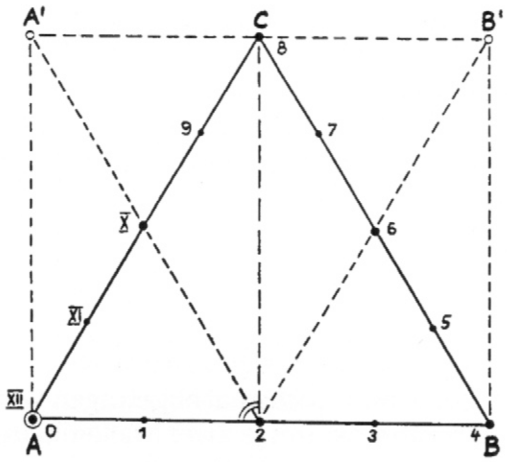


Bild 17

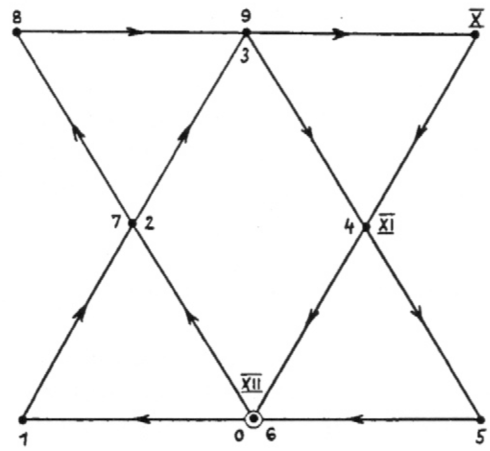


Bild 18

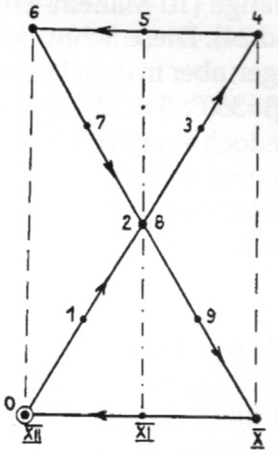


Bild 19

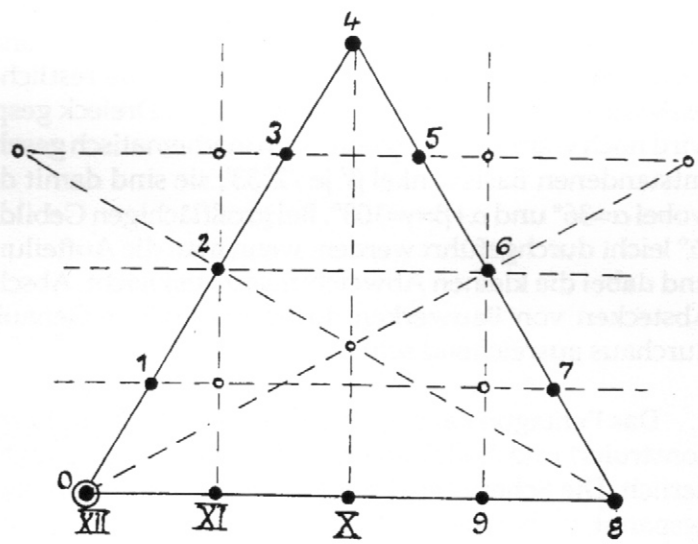


Bild 20

6.5 Quadrat - Achteck

Mit einem Seil beliebiger Länge ein Quadrat abzustecken, ist eine alte Aufgabe, wie sie sich z.B. beim Errichten eines quadratischen Altars ergibt (Bild 21). Man sucht die Seilmitte durch Zusammenlegen der beiden Enden A und B, legt das Seil auf den Boden und merkt dort die Mitte M sowie die Enden A und B an. Um A und B schlägt man mit dem Seil Kreise, die sich in K schneiden. Man legt dann das Seil von M aus durch K bis N. Nun legt man die Seilmitte M auf N und die Seilenden auf die Kreise nach A' und B'. ABA'B' ist dann ein Quadrat [19]. Durch weitere Unterteilung läßt sich ein regelmäßiges Achteck abstecken.

6.6 Sechseck - Zwölfeck

Um ein regelmäßiges Sechseck zu konstruieren, ist es wohl am einfachsten, wenn auf der Kreislinie dessen Radius, z.B. zwei Maßeinheiten, mit der Schnur sechsmal abgetragen wird. Mit der Zwölfknotenschnur wäre so zu verfahren, daß man zunächst mit je zwei Maßeinheiten den Kreis aufreißt und dann mit je zwei Maßeinheiten die Schnur auf dem Kreis entlang straff spannt (Bild 22). Andere Verfahren ergeben sich aus Bild 22 und Bild 23. Im regelmäßigen Sechseck sind noch der sog. Davidsstern (Hexagramm) sowie Rechtecke enthalten. Außerdem kann über die Halbierung der Seiten des Sechsecks ein Zwölfeck konstruiert und abgesteckt werden (Bild 23).

6.7 Fünfeck

Sakrale Bauwerke erfordern manchmal die Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (Pentagon). Schriftliche Belege über den Messungsvorgang gibt es nicht. Die Absteckung auf dem planierten Bauplatz kann man sich aber etwa so vorstellen: Zunächst wird die Zwölfknotenschnur um eine Maßeinheit verlängert; die Meßschnur hat dann 13 Maßeinheiten. Mit drei Maßeinheiten wird nun der Kreis gezogen. Sodann wird die restliche Schnurlänge (10 Maßeinheiten) mit je 5 Maßeinheiten zu einem gleichschenkligen Dreieck gespannt (Bild 24). Diese Schnurkonstruktion wird noch viermal wiederholt. Rein mathematisch gesehen, betragen aber in dem Dreieck 0-3-8 die entstandenen Basiswinkel β' je 72°33'; sie sind damit dem Soll (β=360°: 5 = 72°) nur angenähert, wobei α=36° und $\alpha+\beta=\gamma$=108°. Bei großflächigen Gebilden kann jedoch eine Korrektur von je rund ½° leicht durchgeführt werden, wenn man die Aufteilung noch einmal entgegengesetzt vornimmt und dabei die kleinen Abweichungen ausgleicht. Abschließend wird endgültig markiert. Für das Abstecken von Bauwerken dürfte die erzielte Genauigkeit bei dieser Fünfteilung des Kreises durchaus ausreichend sein.

Das Pentagon kann auch auf andere Weise, und zwar über den sog. Fünfstern (Pentagramm), konstruiert und örtlich abgesteckt werden. Dazu sind nur 10 Maßeinheiten der Meßschnur erforderlich. Die Schnur wird mit je zwei Maßeinheiten nach der in Bild 25 dargestellten Form straff gespannt, wobei die fünf Eckpunkt-Knoten 0 (=X), 2, 4, 6 und 8 markiert und verpflockt werden. Die Knotenpunkte 1, 3, 5, 7 und 9 sowie die entstandenen Schnittpunkte an der gespannten Meßschnur dienen schließlich der Prüfung der Konstruktion. Die Eckpunkte des Fünfsterns können ggf. zu einem regelmäßigen Fünfeck verbunden werden (Bild 25).

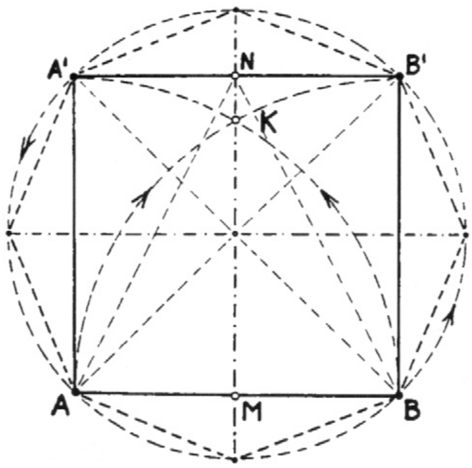


Bild 21

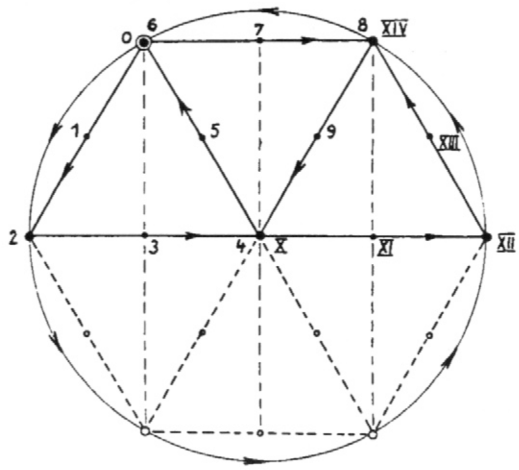


Bild 22

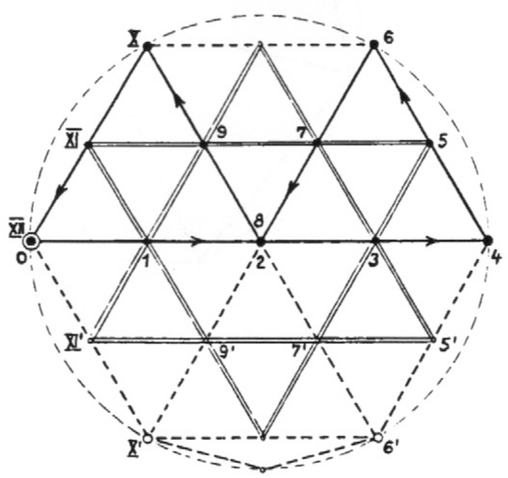


Bild 23

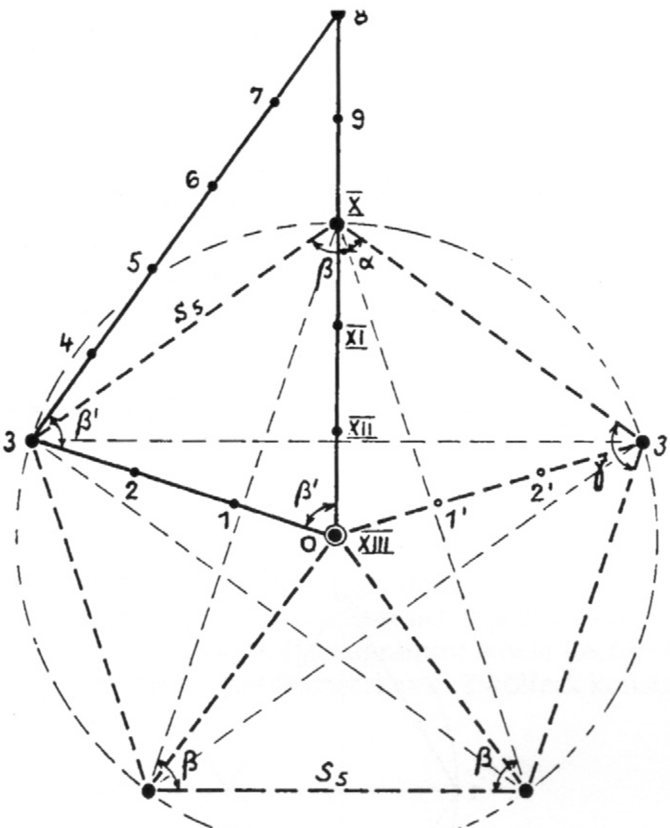


Bild 24

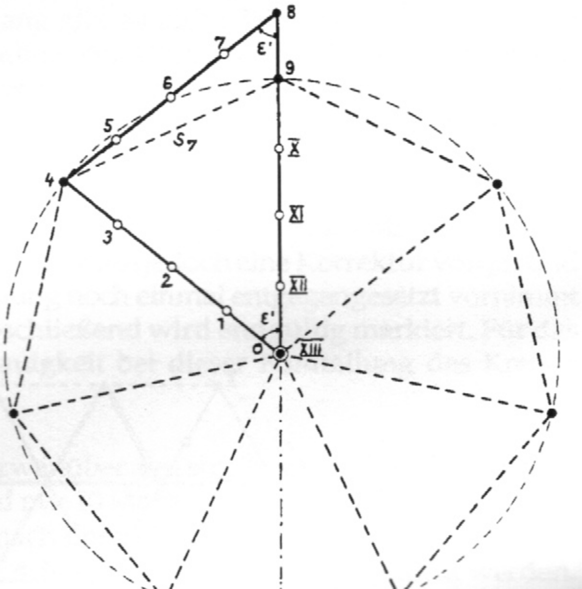


Bild 26

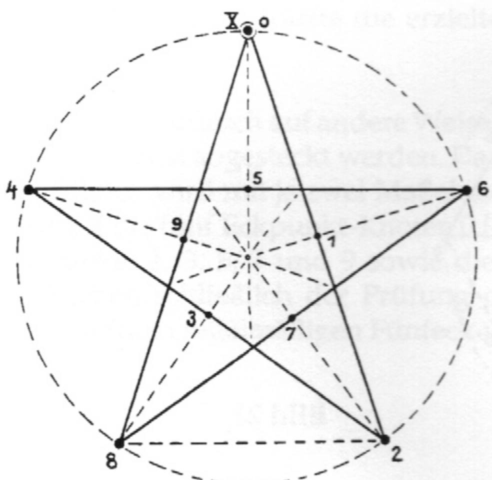


Bild 25

6.8 Siebeneck

Auch das regelmäßige Siebeneck bzw. der sog. Siebenstern wurden gelegentlich bei der Errichtung sakraler Bauwerke zur Absteckung der Grundrisse angewendet. Dabei kann wieder die 13-teilige Knotenschnur benutzt werden. Zunächst ist mit vier Maßeinheiten der Kreis zu ziehen. Die Schnur mit ihren 13 gleichen Abschnitten ermöglicht die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Seiten 5 : 4 : 4 (Bild 26). Diese Schnurkonstruktion wird noch sechsmal wiederholt. Die beiden Basiswinkel ε' im Dreieck 0-4-8 betragen je 51°19', was dem bei der genauen Siebenteilung des Kreises (360°:7) entstehenden Winkel ε = 51°25'43" sehr nahe kommt. Eine Korrektur der geringen Ungenauigkeit wird hier noch leichter sein als bei der Absteckung des regelmäßigen Fünfecks. Durch entsprechende Verbindung der sieben Eckpunkte kann ggf. außerdem ein Siebenstern aufgerissen werden.

7 Schluß

Bei den verschiedenen Seilkonstruktionen an Ort und Stelle hatten Baumeister und Feldmesser keine mathematische Formeln zu Hilfe nehmen müssen; Schnur und Maß genügten ihnen als Werkzeuge. Eine mathematisch-exakte Konstruktion ist beim regelmäßigen Fünf- bzw. Siebeneck mit nur geometrischen Hilfsmitteln ohnehin nicht möglich.

Die Möglichkeiten, Rechte Winkel und andere Figuren durch Seilkonstruktionen zu finden, sind mit den genannten Beispielen sicher nicht erschöpft. In den mittelalterlichen Muster- und Bauhüttenbüchern [6], [10], [13], [16] werden die genauen Verfahren für solche Schnurkonstruktionen jedoch nicht überliefert. Wurden die Anwendungen mit der Zwölfknotenschnur damals von den Feldmessern und Baumeister-Architekten einfach als selbstverständlich angesehen, oder wurde das Wissen davon mit der im Mittelalter üblichen Geheimniskrämerei behandelt? Wir wissen zu wenig über die tatsächlichen Vermessungsvorgänge, da die Kenntnis davon wahrscheinlich als Berufs- und Standesgeheimnis streng gehütet und nur zwischen den "Eingeweihten" ausgetauscht wurde. Z.B. waren die Dombauhütten religiöse Bruderschaften mit eidlicher Verpflichtung auf das "Hüttengeheimnis", was immer das gewesen sein mag.

Literatur

[1] Alberti, L.B.:
De re aedificatoria / Dell'Architettura,
Venedig 1472 / Florenz 1485,
deutsch: Zehn Bücher über die Baukunst, M. Theurer (Hrsg.),
1912, Nachdruck 1975

[2] Bion, N.:
Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématique,
Paris 1709, Den Haag 1723

[3] Cantor, M.:
Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,
1. Band (insges. 4 Bände),
Leipzig 1880, 1922

[4] Geiger, R.:
Indische Geodäsie im Altertum, Dissertation,
Erlangen 1920

[5] Gutman, J.:
Feldmässung, gewiß, richtig unnd kurtz gestellt ...,
Heidelberg 1574

[6] Hahnloser, H.R.:
Villard de Honnecourt. Kritische Gesamtausgabe des Bauhüttenbuches.
2. Aufl., Graz 1972

[7] Hankel, H.:
Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,
Leipzig 1874, Hildesheim 1965

[8] Hecht, K.:
Maß und Zahl in der gotischen Baukunst. 3 Teile in einem Band,
Hildesheim, New York 1979

[9] Kuhn, F.:
Altägyptische Gnomonik - ein Beitrag zur Kenntnis der Geometrie der alten Ägypter,
Ottobeuren 1967

[10] Lacher, L.:
Unterweisungen und Lehrungen ...
In: Reichenberger, A., Vermischte Schriften über christliche Kunst,
Leipzig 1856, S. 133-167

[11] Leonardo von Pisa (Pisano, Fibonacci):
Practica geometriae, 1220,
Rom 1857-1862

[12] Leppert, W.:
Stadtvermessung in der römischen Rheinprovinz.
In: Ingenieurvermessung von der Antike bis zur Neuzeit,
Verm.-Techn. Museum Bd. 12, S. 70-107,
Stuttgart 1982

[13] Lexer, M.:
Endres Tuchers Baumeisterbuch der Stadt Nürnberg,
Stuttgart 1862

[14] Mendthal, H.:
Geometria Culmensis, ein agronomischer Tractat aus der Zeit des Hochmeisters Conrad von Jungingen,
Leipzig 1886

[15] Reinhold, E.:
Gründlicher und warer Bericht Vom Feldmessen und vom Markscheiden,
Erfurt 1574

[16] Roritzer, M.:
Geometria deutsch,
Nürnberg, ca. 1498

[17] Schmidt, F.:
Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter,
Neustadt a.d. Haardt 1935, Nachdruck Stuttgart 1988

[18] Schwenter, D.:
Geometria practica nova et aucta,
Nürnberg 1618, 1641

[19] Smith, E.:
The Geometry of the Hindus,
In: Isis 1913, S. 197 ff.

[20] Wahrig, G.:
Deutsches Wörterbuch,
Gütersloh 1975, 1985, 1991