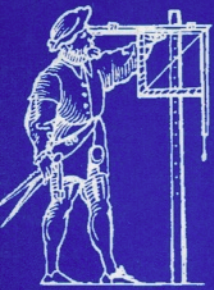


-
- [16] Setzt man π als Umfang eines Quadrats an, dann ist die Länge einer halben Quadratseite $3,14159 : 8 = 0,3927$ m. Mit dem Radius von 0,50 m errechnet sich der Neigungswinkel der Pyramide aus $\tan \alpha = 0,50 : 0,3927$ ($\alpha = 57,6155^\circ = 51^\circ 51'$)
- [17] Baines, J. u. Málek, J.: Weltatlas der alten Kulturen (Ägypten). München 1980.
- [18] Minow, H.: Vermessungen mit der Zwölfknotenschnur. Dortmund 1992
- [19] Auf Bildern ist die Längeneinteilung mit Punkten dargestellt, die man fälschlich als Knoten gedeutet hat (Bild 6). Da ein geknotetes Seil zu ungenau ist, kann die Längeneinteilung nur aus feinen Strichen oder Marken (Fäden) bestehen.
- [20] Peters, K.: Groma oder Winkelkreuz? Das römische Meßgerät aus Pfünz in der Analyse und im Experiment. In: Der Vermessungsingenieur, 1989, S. 57-60



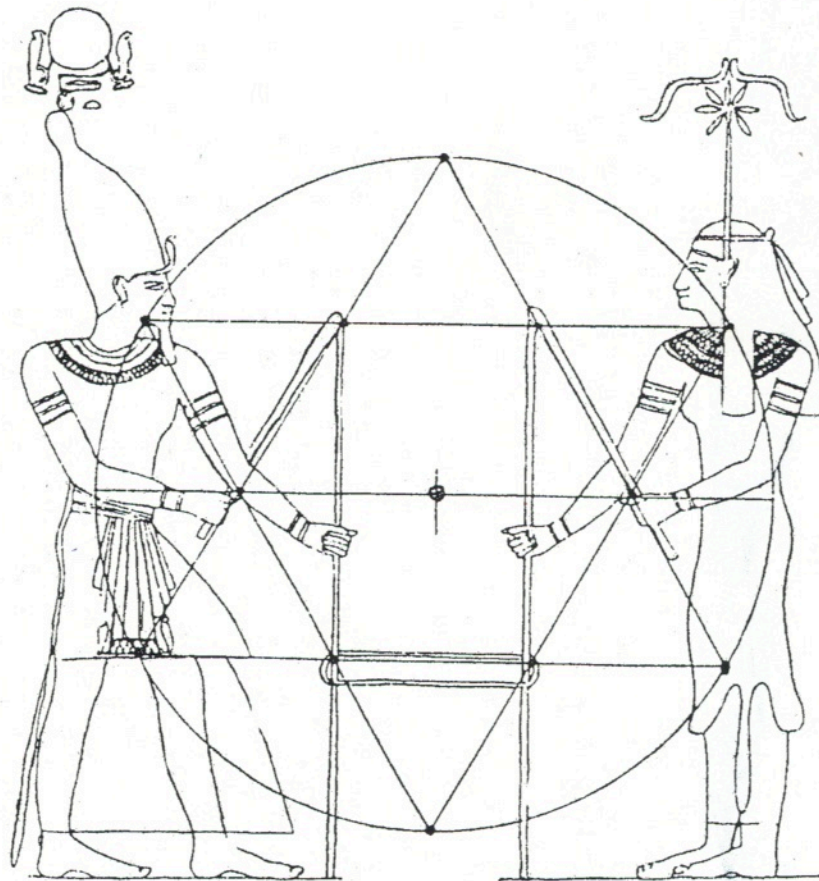
Band 26

Dortmund 1998

FÖRDERKREIS VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.

Die große Pyramide bei Giseh

Maße ■ Planung ■ Absteckung



Konrad Peters

**SCHRIFTENREIHE DES FÖRDERKREISES
VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.**

Band 26

Konrad Peters

**Die große Pyramide bei Giseh
Maße — Planung — Absteckung**

Dortmund 1998

VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.
FÖRDERKREIS

Band 26

Konrad Peters

Die große Pyramide bei Gizeh
Maße — Planung — Absteckung

Herausgegeben vom Förderkreis Vermessungstechnisches Museum e.V.
Postfach 10 12 33, D - 44012 Dortmund

© 1998

Anschrift des Verfassers:
Dipl.-Ing. Konrad Peters, Wiegandweg 63, D - 48167 Münster

Inhalt	Seite
1 Einführung	1
2 Die Pyramide und ihre Maße	2
3 Die Königselle — das Normalmaß für den Bau der Pyramide	4
4 Die Pyramide und die Kreiszahl Pi	4
5 Die Übertragung des Kreisumfangs auf einen Längenmaßstab	6
6 Die Nordorientierung der Pyramide	6
7 Die Höhenmessung für die Verlegung des Grundsteinpflasters	10
8 Die Grundrißabsteckung	11
9 Absteckung der Seitenneigung: Geräte und Meßverfahren	14
10 Absteckung der Gänge und Kammern	18
11 Fehleranalyse für den Einbau der Seitenneigungen	21
12 Vergleich mit den Neigungswinkeln anderer Pyramiden	24
13 Zusammenfassung und Ausblick	26
Anmerkungen und Literatur	28

1 Einführung

Forschungen über den Ursprung der Bau- und Meßkunst führen ins Land der Pharaonen am Nil. Keine Kultur des Altertums hat mit ihren Kunst- und Bauwerken eine so umfassende Selbstdarstellung hinterlassen wie die altägyptische. Unter den alten Hochkulturen ist sie die bekannteste und am meisten erforschte. Ein monumentales Zeugnis dafür ist die große Pyramide bei Giseh. Wahrscheinlich als Grab und Tempel für den Pharao Cheops (2551- 2528 v.Chr.) errichtet, fasziniert sie noch heute und gibt der Forschung Rätsel auf (Bilder 1 und 2).

Wie die Pyramide abgesteckt wurde, ist eines dieser Rätsel, um deren Lösung sich in den letzten hundert Jahren besonders die Archäologen bemühten. Die Forschungsergebnisse sind widersprüchlich und lassen häufig den Bezug zum vermessungstechnisch Machbaren der damaligen Zeit vermissen. Aus dem Altertum überliefert sind für die Bauwerksabsteckung nur allgemeine Angaben. Es kann daher weder für die Pyramide noch für andere Bauten dieser Epoche mit absoluter Sicherheit gesagt werden, wie die Absteckung erfolgte.

Aussagen darüber, die eine gewisse Wahrscheinlichkeit erreichen, sind erst möglich, wenn ein altes Bauwerk neu vermessen wird. Meßdaten erlauben eine Rekonstruktion. Sie zeigen die Genauigkeit, mit der es errichtet wurde, und geben damit Hinweise auf mögliche Absteckverfahren. Das gilt auch für die Pyramide bei Giseh, die 1921 unter der Leitung des Archäologen Ludwig Borchardt von englischen Vermessungsingenieuren vermessen wurde [1][2]. Mit Hilfe der aus der Neuvermessung vorliegenden Daten und unter Berücksichtigung des in der Erbauungszeit der Pyramide meßtechnisch Möglichen ist diese Abhandlung ein Versuch, die Arbeit meiner Berufsvorgänger zu analysieren.

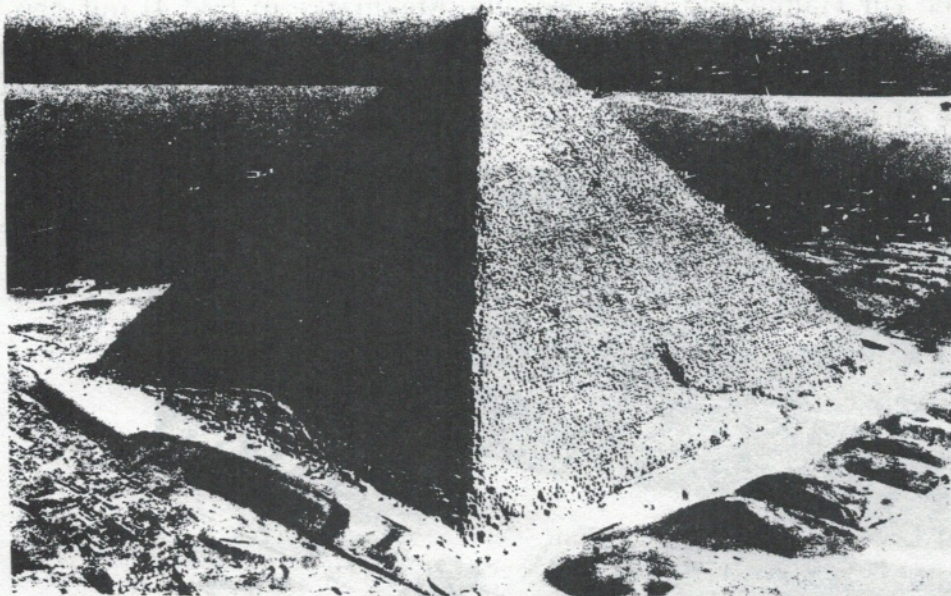


Bild 1

Die große Pyramide bei Giseh mit Nordeingang

2 Die Pyramide und ihre Maße

Für die Ermittlung der Seitenlängen und Winkel des Grundrisses legten die englischen Vermessungsingenieure einen geschlossenen Polygonzug um das Bauwerk, bei dem die Strecken mit geeichten Invardrähten und die Winkel mit einem Mikroskop-Theodoliten gemessen wurden (Bild 3).

Die alten ägyptischen Baumeister hatten bei ihrer Absteckung die Quadratseiten auf das Grundsteinpflaster eingeritzt [3]. Freigelegte Teilstücke — Längen zwischen 26 m und 58 m — wurden von englischen Landmessern auf den Polygonzug eingemessen. Mit den Meßergebnissen wurden Seitenlängen und Winkel des Pyramidenquadrats errechnet. Die Ergebnisse sind in Bild 4 dargestellt. Eine Absteckmarkierung in der Mitte der Nordseite legt die Richtung für den Eingang in die Grabkammer fest.

Die Höhenlage des Grundsteinpflasters wurde durch ein Feinnivellement geprüft. Der größte Höhenunterschied zwischen den nivellierten Punkten beträgt 20 mm [20]. Die ursprüngliche Höhe der Pyramide konnte durch die Neuvermessung nicht genau bestimmt werden, da die Spitze um etwa 9 m abgetragen worden ist. Forschungen lassen vermuten, daß die Höhe mit 280 Königsellen geplant war [5]. Für die Nordorientierung ermittelten die englischen Vermessungsingenieure eine Abweichung (Westseite) von 2,5 Altminuten gegenüber dem astronomischen Nord (vgl. Bild 4).

Die Daten der Neuvermessung ergeben, daß die ägyptischen Baumeister in der Lage waren, den Grundriß nach Länge, Richtung und Höhe mit großer Genauigkeit abzustecken. Das gilt besonders für die Rechtwinkel an der Westseite, die nur einen Fehler im Sekundenbereich aufweisen. Der größere Winkelfehler an der Ostseite ergibt sich aus den unterschiedlichen Längen der Süd- (230,454 m) und Nordseite (230,253 m). Auch die Längenmaße zur Halbierung der Nordseite (Meßmarke in Bild 4) mit den Teillängen 115,090 m und 115,161 m zeigen, daß die Längenmessung der fehleranfälligste Teil der Absteckung war. Die Genauigkeit der beiden Rechtwinkel an der Westseite deutet darauf hin, daß die Absteckung des Pyramidenquadrats von dieser Seite aus erfolgte.

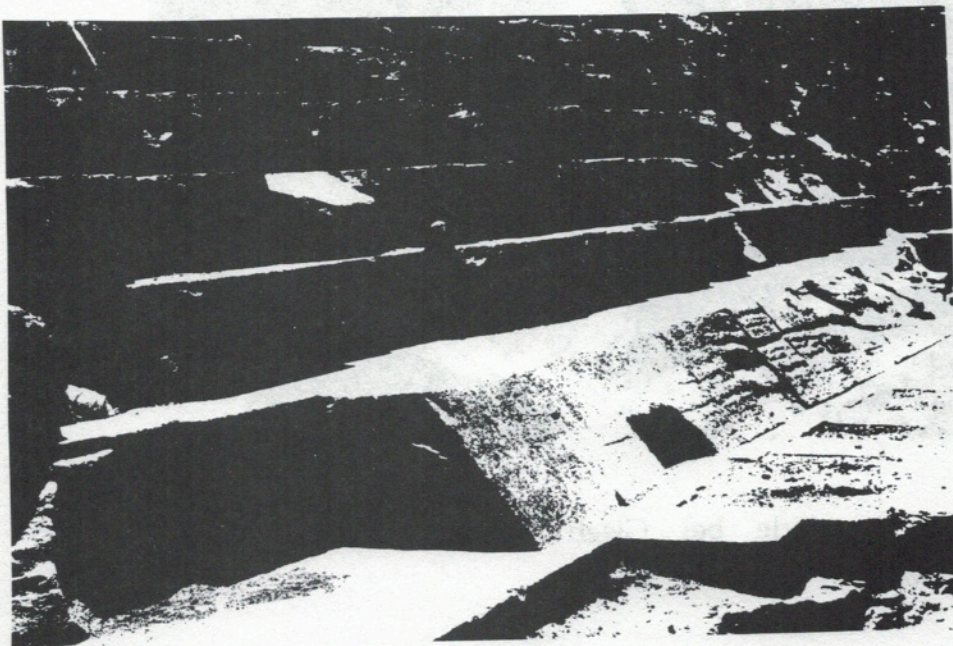


Bild 2
Das Grundsteinpflaster
der Pyramide mit
unterer Bekleidungsschicht

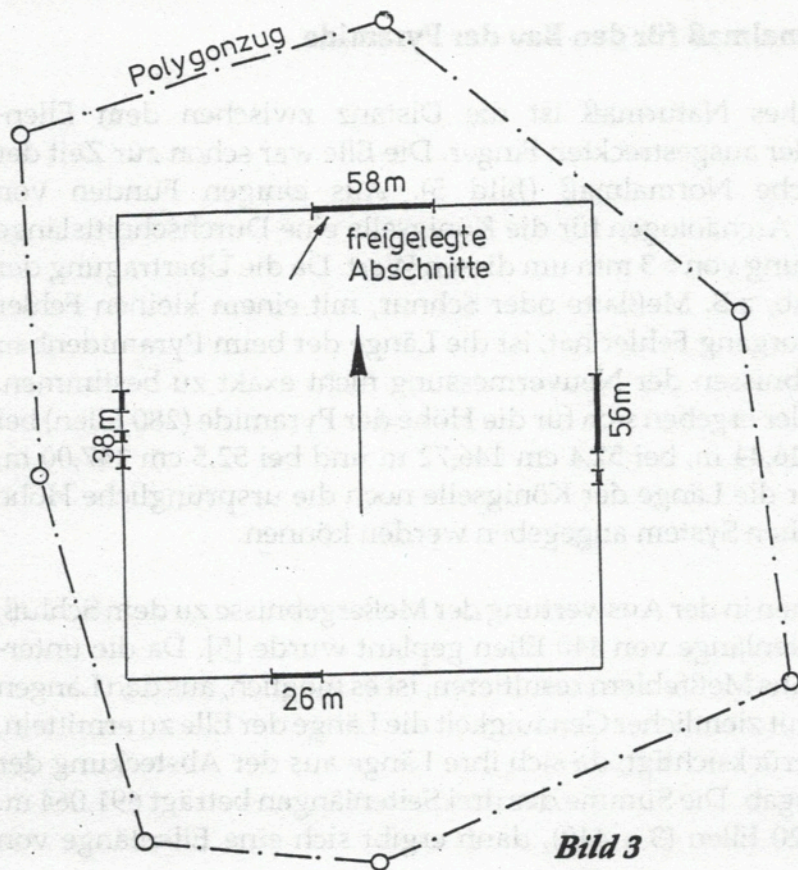


Bild 3
Polygonzug zur Bestimmung des
Pyramidenquadrats

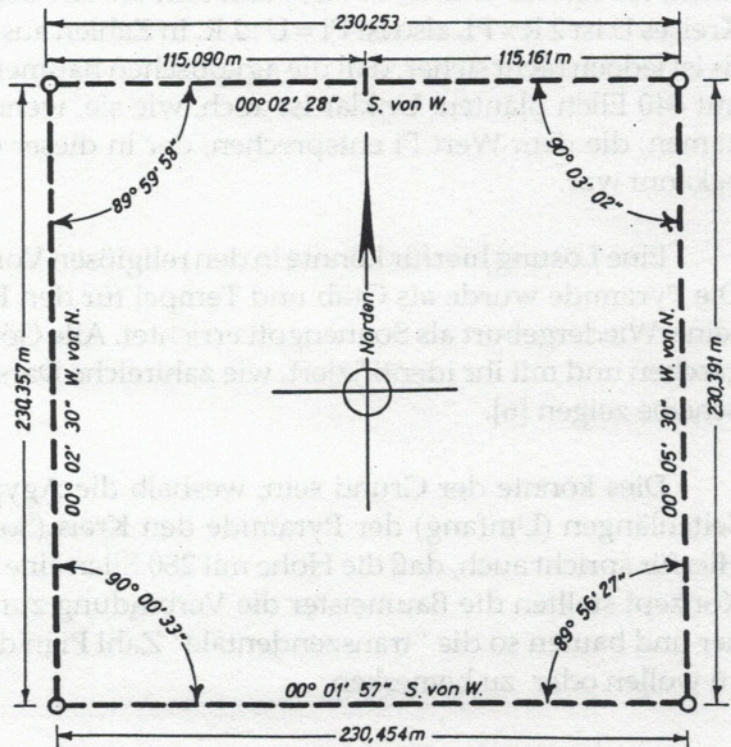


Bild 4
Grundriß der Pyramide
mit Daten nach
Borchardt

3 Die Königselle - das Normalmaß für den Bau der Pyramide

Die Elle als ursprüngliches Naturmaß ist die Distanz zwischen dem Ellenbogenknochen und der Spitze der ausgestreckten Finger. Die Elle war schon zur Zeit der Pyramidenbauer das gesetzliche Normalmaß (Bild 5). Aus einigen Funden von Ellenmaßstäben ermittelten die Archäologen für die Königselle eine Durchschnittslänge von 52,5 cm, mit einer Schwankung von ± 3 mm um diesen Wert. Da die Übertragung der Elle auf einen längeren Maßstab, z.B. Meßlatte oder Schnur, mit einem kleinen Fehler behaftet ist und auch der Meßvorgang Fehler hat, ist die Länge der beim Pyramidenbau eingesetzten Elle aus den Ergebnissen der Neuvermessung nicht exakt zu bestimmen. Ohne Berücksichtigung der Fehler ergeben sich für die Höhe der Pyramide (280 Ellen) bei einer Ellenlänge von 52,3 cm 146,44 m, bei 52,4 cm 146,72 m und bei 52,5 cm 147,00 m. Dieses Beispiel zeigt, daß weder die Länge der Königselle noch die ursprüngliche Höhe der Pyramide genau im metrischen System angegeben werden können.

Einige Ägyptologen kommen in der Auswertung der Meßergebnisse zu dem Schluß, daß die Pyramide mit einer Seitenlänge von 440 Ellen geplant wurde [5]. Da die unterschiedlichen Längen der Seiten aus Meßfehlern resultieren, ist es möglich, aus den Längen der Nord-, West- und Südseite mit ziemlicher Genauigkeit die Länge der Elle zu ermitteln. Hierbei bleibt die Ostseite unberücksichtigt, da sich ihre Länge aus der Absteckung der Rechtwinkel an der Westseite ergab. Die Summe der drei Seitenlängen beträgt 691,064 m. Teilt man diese Zahl durch 1320 Ellen (3×440), dann ergibt sich eine Ellenlänge von 0,523533 m.

4 Die Pyramide und die Kreiszahl Pi

Aus der Summe der Pyramidenseiten ($4 \times 440 = 1760$ Ellen) und aus ihrer Höhe (280 Ellen) als Radius R eines Kreises läßt sich die Kreiszahl π berechnen. Der Umfang eines Kreises U ist $2 R \times \pi$, also ist $\pi = U : 2 R$. In Zahlen ausgedrückt ist $\pi = 1760 : 560 = 3,14286$. Es ist jedoch nicht sicher, daß die ägyptischen Baumeister die Länge einer Pyramidenseite mit 440 Ellen planten. Unklar ist auch, wie sie, wenn es kein Zufall war, zu den Maßen kamen, die dem Wert π entsprechen, der in dieser Genauigkeit den Baumeistern nicht bekannt war.

Eine Lösung hierfür könnte in den religiösen Vorstellungen der alten Ägypter liegen. Die Pyramide wurde als Grab und Tempel für den Pharao als weltlicher Herrscher und seiner Wiedergeburt als Sonnengott errichtet. Alle Götter wurden in Beziehung zur Sonne gesehen und mit ihr identifiziert, wie zahlreiche Darstellungen belegen, die die Sonne als Scheibe zeigen [6].

Dies könnte der Grund sein, weshalb die Ägypter für die Höhe (Radius) und die Seitenlängen (Umfang) der Pyramide den Kreis (Sonne) als Planungskonzept wählten. Hierfür spricht auch, daß die Höhe mit 280 Ellen eine durch 4 teilbare Zahl ist. Mit diesem Konzept stellten die Baumeister die Verbindung zur göttlichen Sonne und zum Jenseits her und bauten so die "transzendente" Zahl π in die Pyramide ein, ohne es zu wissen, zu wollen oder zu bemerken.

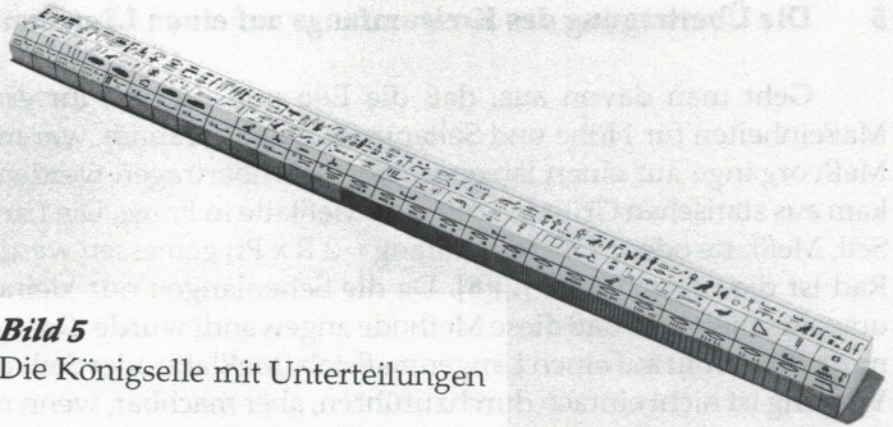


Bild 5
Die Königselle mit Unterteilungen

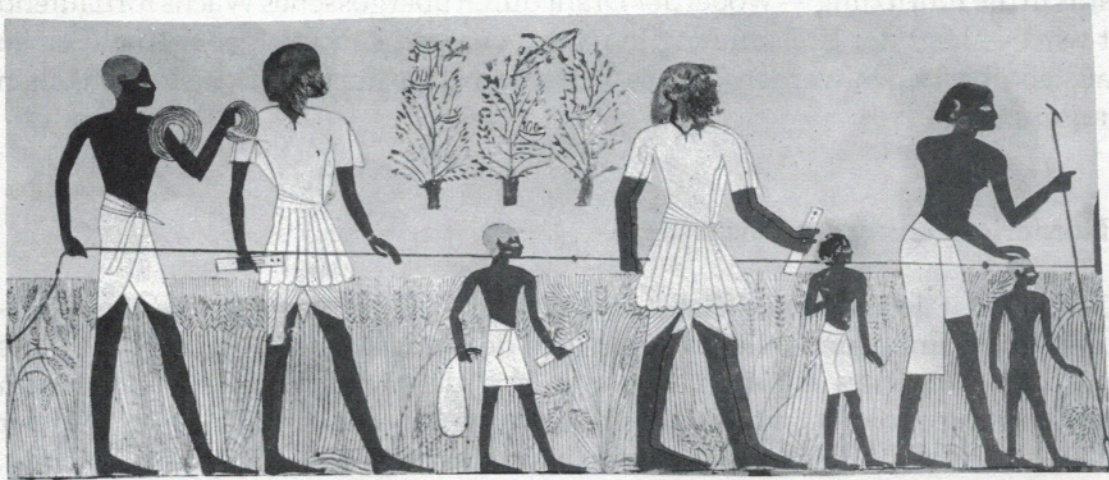


Bild 6
Harpedonaptien (Seilspanner) bei der Feldmessung mit dem Meßseil (um 1300 v.Chr.)



Bild 7
Aufgerolltes Meßseil in den Armen eines Feldmessers.
Da die Zahl 100 und die Bedeutung Seil die gleiche Hieroglyphe zeigen, könnte die Seillänge 100 Ellen betragen.

5 Die Übertragung des Kreisumfangs auf einen Längenmaßstab

Geht man davon aus, daß die Elle und der mit ihr ermittelte Kreisumfang die Maßeinheiten für Höhe und Seitenlängen der Pyramide waren, dann mußten sie für die Meßvorgänge auf einen längeren Maßstab übertragen werden. Für die Höhenmessung kam aus statischen Gründen nur eine Meßlatte in Frage. Die Längen dagegen konnten mit Seil, Meßlatte oder Meßrad (Umfang = $2 R \times \text{Pi}$) gemessen werden. Die Messung mit dem Rad ist die ungenaueste [7][8]. Da die Seitenlängen nur kleine Meßfehler zeigen, ist es unwahrscheinlich, daß diese Methode angewandt wurde. Das bedeutet: Der Kreisumfang mußte abgerollt auf einen Längenmaßstab (Meßlatte oder Seil) übertragen werden. Dieser Vorgang ist nicht einfach durchzuführen, aber machbar, wenn man auf einer Wachsplatte den Kreis mit dem Radius einer Elle einritzte. Durch Einlegen eines Silber- oder Kupferdrahts in die Einritzung — wobei der Draht durch übergossenes Wachs fortlaufend stabilisiert wird — liegt der Kreisumfang in natura vor und kann aufgebogen auf einen Längenmaßstab übertragen werden. Dieses Verfahren zeigt nur eine der Möglichkeiten zur Übertragung.

6 Die Nordorientierung der Pyramide

Die Genauigkeit der Rechtwinkelabsteckung zeigt, daß die Westseite die Ausgangsbasis für die Absteckung und Nordorientierung des Grundrisses war, und daß die Absteckung nicht, wie man annehmen konnte, von der Bauwerksachse oder einem Achsenkreuz aus vorgenommen wurde. Das belegt auch der eingeritzte Meßpunkt in der Mitte der Nordseite, der die Richtung für die Grabkammer im Innern der Pyramide angibt. Als Vermarkungspunkt der Bauwerksachse müßte auch die Südseite einen entsprechenden Punkt aufweisen. Ein solcher wurde bei der Neuvermessung jedoch nicht gefunden. Die Rechtwinkelabsteckung von der Bauwerksachse aus hätte — infolge der Fehler durch die Längenmessung — zwangsläufig an der Westseite zu großen Winkelfehlern geführt, so wie sie die Ostseite aufweist.

Seit etwa 3100 v.Chr. gibt es über die Nordorientierung von altägyptischen Bauwerken eine Anzahl von Bildern und Reliefs, die ab 1500 v.Chr. auch Inschriften enthalten, die diesen Vorgang beschreiben [9]. Die Bilder zeigen den Pharao und die Weisheitsgöttin, die diesen Vorgang beschreiben. Beide halten in der einen Hand einen Schlegel und in der anderen einen Stab. Um die Stäbe ist ein in sich geschlossenes Seil gespannt (Bild 8). Die Göttin trägt auf dem Kopf einen Stern, über den sich zwei Stierschenkel (Bezeichnung für die Nordrichtung) befinden. Benannt sind die Bilder mit "Spannen der Meßschnur im Tempel zwischen den Fluchtstäben". Zu dem König ist gesagt: "Der König, der Sohn der Sonne, der tüchtig ist mit dem Meßgerät und der den Grundriß legt wie die Weisheitsgöttin". Er spricht dabei die Formel: "Ich fasse den Fluchtstab, packe das Ende des Schlegels und ergreife die Schnur zusammen mit der Weisheitsgöttin. Ich wende mein Gesicht nach dem Gang der aufsteigenden Sterne. Ich richte meine Augen nach dem Sternbild des Stierschenkels. Ich lege die vier Ecken deines (des Gottes) Tempels fest." [2]

Die Bilder stellen den Vorgang der Nordorientierung dar. Sie lassen aber nicht erkennen, wie dieser im einzelnen erfolgte. Die geringe Nordabweichung (2,5 Minuten) der Pyramide zeigt jedoch, daß die alten Ägypter in der Lage waren, mit einfachen Geräten eine gute Orientierung durchzuführen.

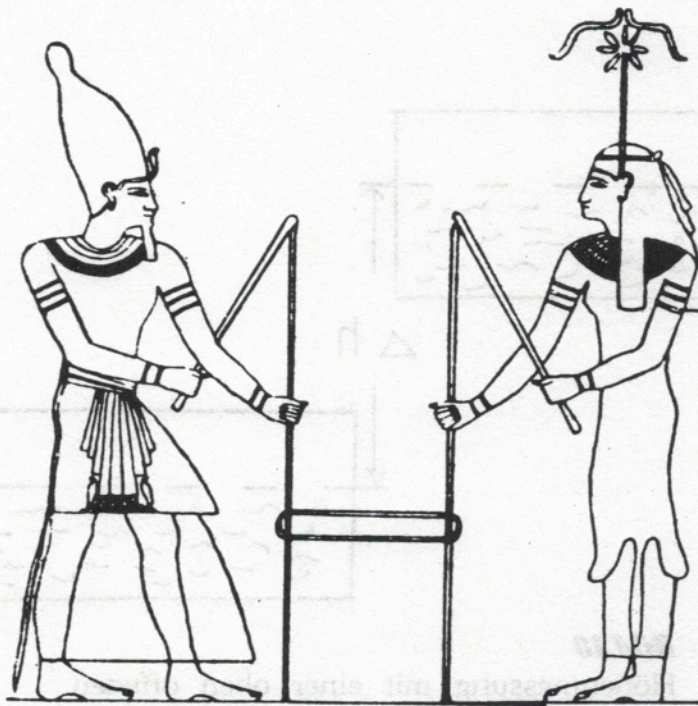


Bild 8

Spannen der Meßschnur im Tempel
zwischen den "Fluchtstäben".
Symbolische Darstellung der Absteckung
(um 1300 v.Chr.)

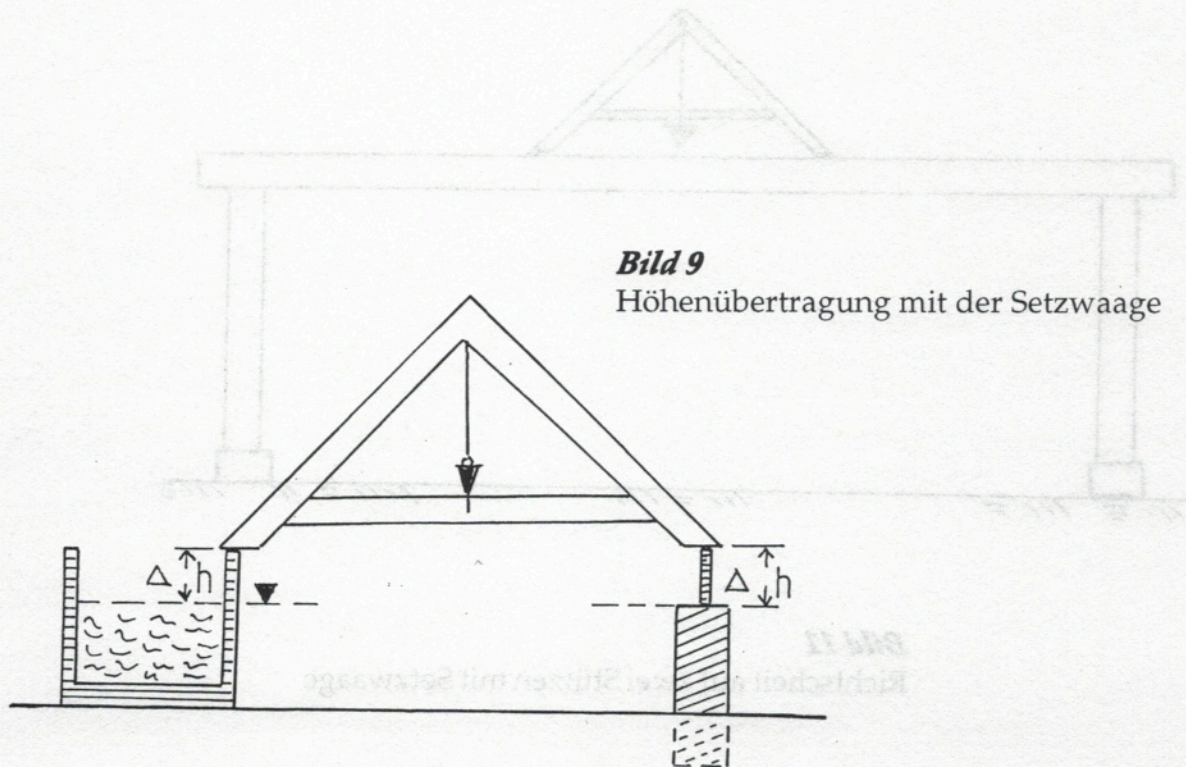


Bild 9

Höhenübertragung mit der Setzwaage

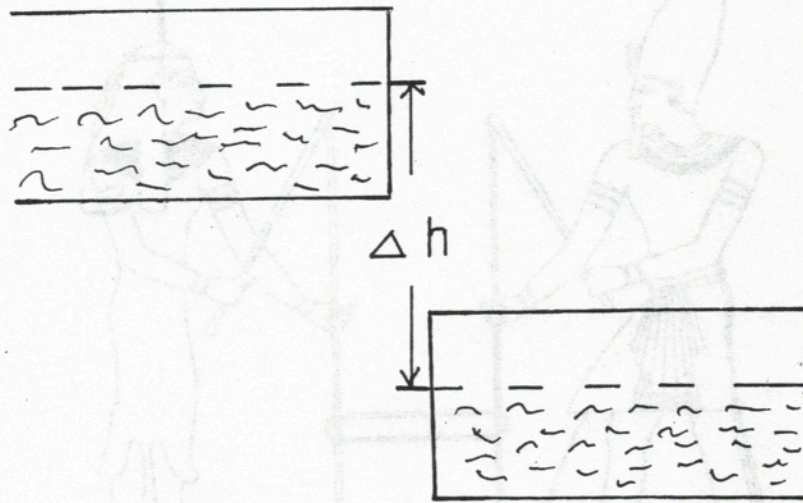


Bild 10

Höhenmessung mit einer oben offenen Wasserleitung in nicht ebenem Gelände

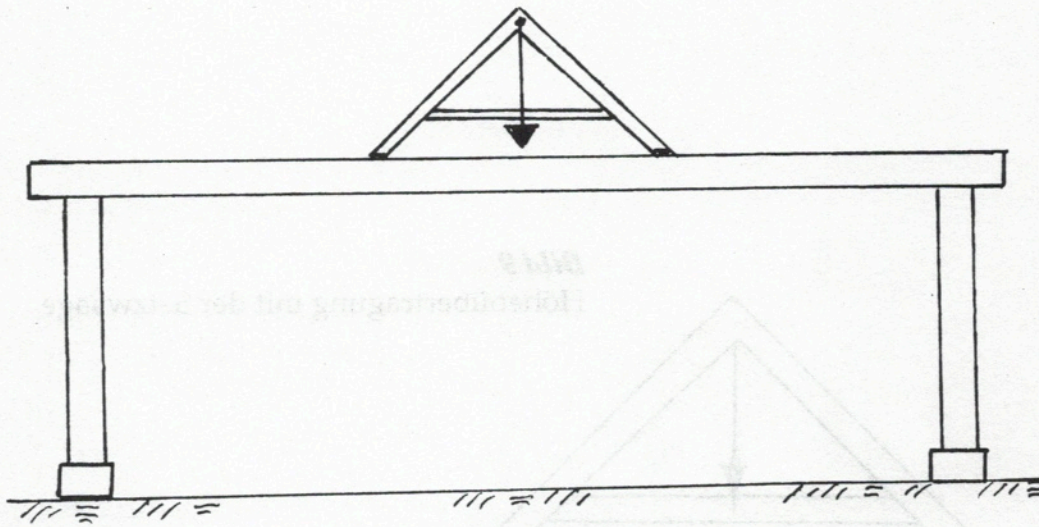


Bild 11

Richtscheit auf zwei Stützen mit Setzwaage

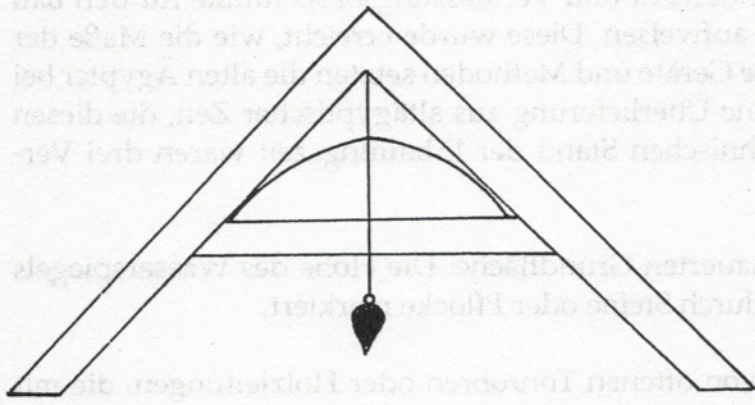


Bild 12
Altägyptische Setzwaage

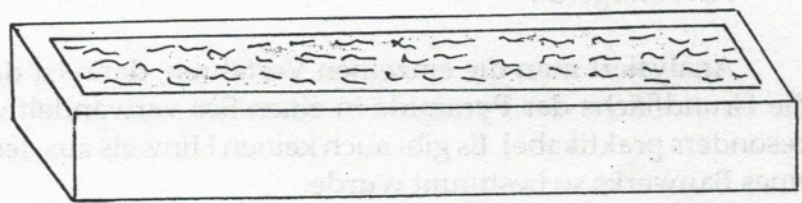


Bild 13
Offene Wasserwaage als Nivellieraufsatz

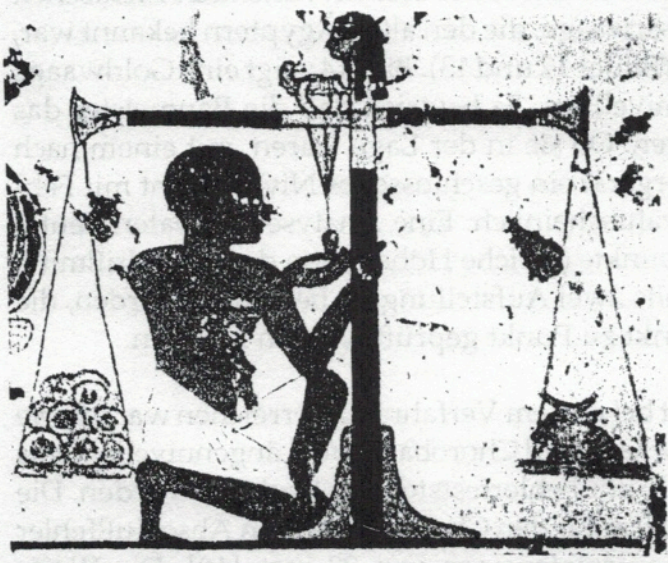


Bild 14
Die Goldwaage zeigt das Konstruktionschema eines Setzwaagennivelliers (um 1400 v. Chr.)

7 Die Höhenmessung für die Verlegung des Grundsteinpflasters

Das Grundsteinpflaster als Fundament und Vermessungsbasis mußte für den Bau der Pyramide eine gute Höhenlage aufweisen. Diese wurde erreicht, wie die Maße der Neuvermessung belegen [2]. Welche Geräte und Methoden setzten die alten Ägypter bei der Höhenmessung ein? Es gibt keine Überlieferung aus altägyptischer Zeit, die diesen Vorgang beschreibt. Nach dem technischen Stand der Erbauungszeit waren drei Verfahren möglich:

- Unterwassersetzung der ummauerten Grundfläche: Die Höhe des Wasserspiegels wurde auf Signal gleichzeitig durch Steine oder Pflöcke markiert,
- Flächennivellement mit Hilfe von offenen Tonrohren oder Holzleitungen, die mit Wasser gefüllt waren,
- Nivellement mit einem nach dem Prinzip der Setz- oder Wasserwaage arbeitenden Nivelliergerät.

Analysiert man die einzelnen Verfahren, dann ist das Unterwassersetzen, bei dem die Grundfläche der Pyramide in einen See verwandelt wird, zwar möglich, aber nicht besonders praktikabel. Es gibt auch keinen Hinweis aus dem Altertum, daß die Höhenlage eines Bauwerks so bestimmt wurde.

Die Höhenmessung mit in einer trogförmigen Leitung stehendem Wasser war den Pyramidenbauern bekannt. Mit Hilfe der Wasser- oder Setzwaage kann die Wasserhöhe in der Leitung auf beliebig viele Steine oder Pflöcke übertragen werden (Bild 9). Im Experiment wurde für diesen Vorgang ein Fehler von ± 5 bis 10 mm ermittelt. Sollte wegen der Geländebeschaffenheit die Leitung höher oder tiefer liegen (Bild 10), dann muß der sich daraus ergebende Höhenunterschied (Δh) festgehalten werden. Dazu wird die Wasserhöhe außen an den Leitungen markiert und der Höhenunterschied gemessen. Mit diesem Verfahren ist ein längeres Nivellement möglich.

Beim dritten Verfahren werden die Höhen durch ein Längennivellement bestimmt. Das Gerät hierzu besteht aus einem auf zwei Böcken oder Steinen ruhenden Richtscheit (Bild 11). Es wird mit einer Setz- oder Wasserwaage, die den alten Ägyptern bekannt war, mit Holzkeilen in die Waagerechte justiert (Bilder 12 und 13). Bild 14 zeigt eine Goldwaage mit den Bauelementen eines Setzwaagennivelliers. Es beweist, daß die Baumeister das Konstruktionsprinzip dieses Geräts kannten. Ob sie in der Lage waren, mit einem nach dem Prinzip der Waage gebauten Nivelliergerät ein geschlossenes Nivellement mit Fehlerverteilung durchzuführen, scheint unwahrscheinlich. Eine Analyse der Daten deutet eher darauf hin, daß die einzelnen Höhenpunkte (gleiche Höhen) von der Grundrißmitte aus in mehreren Nivelliervorgängen (jeweils zwei Aufstellungen) bestimmt wurden, die dann durch weitere Meßvorgänge von Punkt zu Punkt geprüft werden konnten.

Um festzustellen, welche Genauigkeit bei diesem Verfahren zu erreichen war, führte ich mit nachgebauten Geräten (Dioptersetzwaage und Chorobat) zwei Längennivellements durch, die mit einem modernen Gerät (Ni. 2) zur Fehlerfeststellung begleitet wurden. Die Messungen ergaben bei einer Strecke von 420 m für den Chorobaten einen Abschlußfehler (ohne Ausgleich) von 14 mm, für die Dioptersetzwaage von 22 mm [10]. Die Werte

belegen, daß bei der Höhenübertragung von der Mitte des Grundrisses aus mit den alten Nivelliergeräten die Genauigkeit zu erreichen war, wie sie die Höhenlage des Pyramidengrundrisses aufweist.

8 Die Grundrißabsteckung

Nach der Festlegung der Westseite wurden an deren Endpunkten die Rechtwinkel abgesteckt. Beim technischen Stand der damaligen Zeit waren drei Verfahren möglich: durch Bogenschlag, mit dem Winkelkreuz (Messung in zwei Lagen) oder durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Seitenverhältnis 3, 4, 5. Bild 15 zeigt die Verfahren, bei denen die Konstruktion der Rechtwinkel beidseitig zur Westseite erfolgt. Dadurch kontrolliert sich die Rechtwinkelabsteckung, denn die Punkte 1, 2 und 3 müssen bei exaktem Abstecken eine Gerade bilden.

Die minimalen Winkelfehler an der Westseite beweisen, daß die Baumeister eine gute Genauigkeit erreichten (Bild 4). Diese war im Verfahren nach Bild 15 (Beispiel A) nur mit einem Meßseil zu erzielen, das bei der Eichung und Messung an den Enden mit Gewichten unter gleicher Spannung gehalten wurde. Für die Absteckung des rechten Winkels war auf dem Seil keine Längenteilung erforderlich. Es genügte jeweils eine Meßmarke (Strich) auf dem Seil für die Absetzung der Hilfspunkte auf der Westseite und für die Durchführung des Bogenschlags. Bilden die Punkte 1, 2 und 3 keine exakte Gerade, muß die Absteckung wiederholt werden.

Auch die in Bild 15 (Beispiel B) dargestellte Absteckung mit dem Winkelkreuz ergibt, wenn sie zur Ausschaltung des Gerätefehlers in zwei Lagen durchgeführt wird, genaue Ergebnisse. Für dieses Verfahren gibt die Quellenlage aus altägyptischer Zeit keinen gesicherten Beweis. Das Winkelkreuz ist in unterschiedlichen Bauformen erst bei den Griechen, Etruskern und Römern nachgewiesen [20].

Bild 15 (Beispiel C) zeigt die Absteckung mit der Zwölfknotenschnur [18]. Das Verfahren ist nur für die Feldmessung geeignet. Für die Bauabsteckung ist es zu ungenau, denn die Markierung der Längenteilung auf der Schnur enthält kleine Fehler, die sich bei einer langen Strecke erheblich summieren [19].

Nach Verlängerung der abgesteckten Rechtwinkelseiten durch Fluchten über Lotfaden (genauer als Fluchtstäbe, vgl. Bild 26), erfolgte die Endpunktbestimmung der Nord- und Südseite durch eine Längenmessung. Dadurch war zwangsläufig die Länge der Ostseite bestimmt. Ob den ägyptischen Baumeistern die Diagonalkontrolle, die heute noch bei einfachen Bauwerken angewandt wird, bekannt war, kann nicht belegt werden. Im Gegensatz zur Rechtwinkelabsteckung zeigen die Seitenlängen einen größeren Fehler. Einige Forscher vermuten daher, daß die Seitenlängen mit einem Meßrad bestimmt wurden (vgl. hierzu Abschnitt 5).

Die Genauigkeitsanalyse der drei Verfahren führt zu der Erkenntnis, daß mit einiger Wahrscheinlichkeit die Rechtwinkel durch Bogenschlag (Bild 15, Beispiel A) abgesteckt wurden.

Wie heute auch mußte im Altertum eine Bauwerksabsteckung unter Freihaltung des Bauraums gesichert und vermarktet werden. Dieser Vorgang ist in Bild 16 dargestellt.

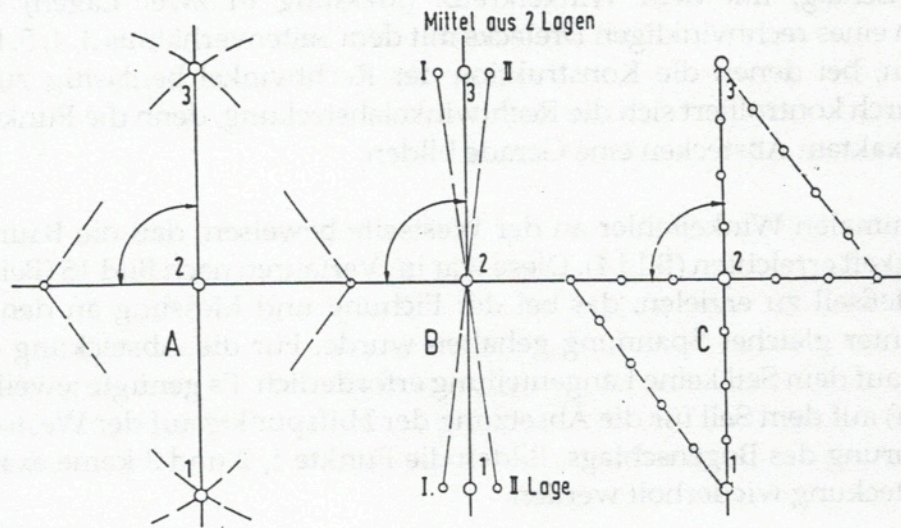


Bild 15

Möglichkeiten der Rechtwinkelabsteking:

A = durch Bogenschlag

B = mit dem Winkelkreuz in zwei Lagen

C = im Verhältnis 3, 4, 5

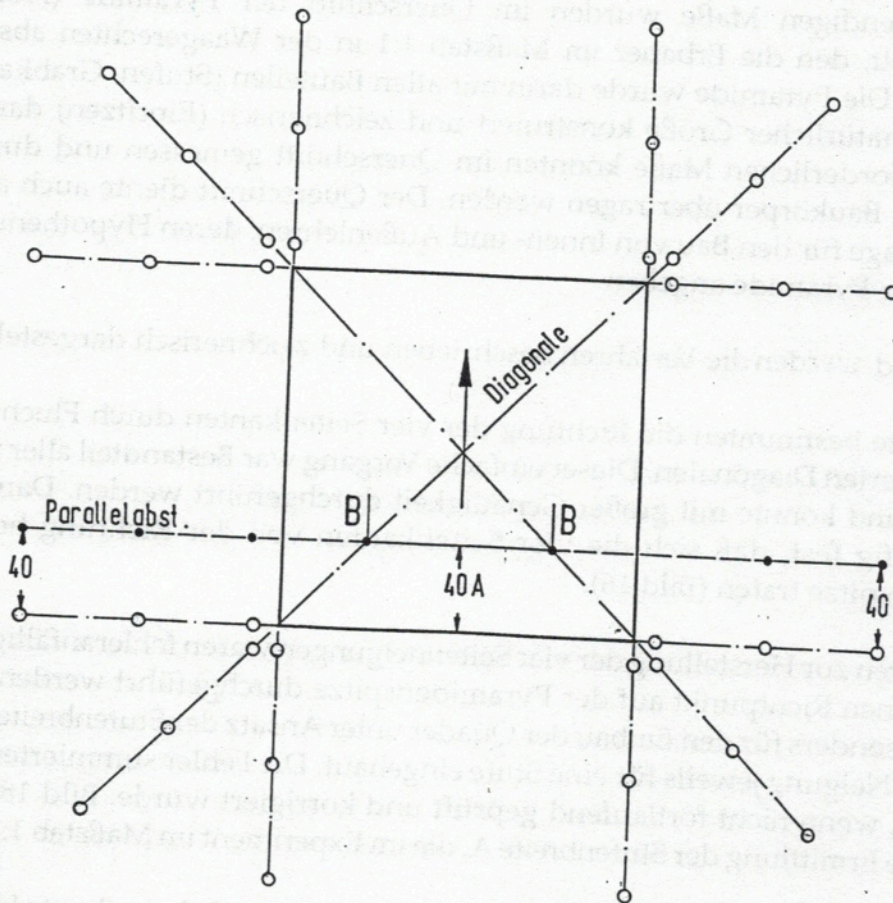


Bild 16
 Sicherung der Grundrißabsteckung mit
 Beispiel für die Prüfung der Stufenbreiten
 nach Einbau von 40 Schichten (Punkt B)

9 Absteckung der Seitenneigungen: Geräte und Meßverfahren

Die Pyramide besteht aus Steinquadern, die in immer kleiner werdenden Schichten vom Grundsteinpflaster bis zur Spitze stufenförmig verlegt wurden. Die Neigung konnte durch Fluchten von der Grundseite zur Spitze problemlos eingehalten werden, wenn vorab in der Pyramidenmitte ein Kern (Zentralbau) von ca. 146 m Höhe gebaut wurde. Dieser zeitaufwendige und unpraktische Vorgang kann jedoch nicht belegt werden [11]. Die Baumeister konnten aber auch nur von den Grundseiten aus die Neigung hochbauen. Die hierzu notwendigen Maße wurden im Querschnitt der Pyramide (Nord-Süd-Richtung) ermittelt, den die Erbauer im Maßstab 1:1 in der Waagerechten absteckten (Reißboden) [12]. Die Pyramide wurde darin mit allen Bauteilen (Stufen, Grabkammern und Gängen) in natürlicher Größe konstruiert und zeichnerisch (Einritzen) dargestellt (Bild 17). Alle erforderlichen Maße konnten im Querschnitt gemessen und durch Absteckung auf den Baukörper übertragen werden. Der Querschnitt diente auch als Konstruktionsgrundlage für den Bau von Innen- und Außenlehren, deren Hypothenusen die Seitenneigung der Pyramide angeben.

Nachfolgend werden die Verfahren beschrieben und zeichnerisch dargestellt:

- Die Bauleute bestimmten die Richtung der vier Seitenkanten durch Fluchten über die verlängerten Diagonalen. Dieser einfache Vorgang war Bestandteil aller weiteren Verfahren und konnte mit großer Genauigkeit durchgeführt werden. Damit stand zwangsläufig fest, daß sich die vier Seitenkanten von der Richtung her in der Pyramidenspitze trafen (Bild 16).
- Die Verfahren zur Herstellung der vier Seitenneigungen waren fehleranfälliger, wenn sie ohne einen Richtpunkt auf der Pyramidenspitze durchgeführt werden mußten. Das gilt besonders für den Einbau der Quader unter Ansatz der Stufenbreite A. Dabei wurde die Neigung jeweils für eine Stufe eingebaut. Die Fehler summierten sich zur Spitze hin, wenn nicht fortlaufend geprüft und korrigiert wurde. Bild 18 zeigt die graphische Ermittlung der Stufenbreite A, die im Experiment im Maßstab 1:2 erfolgte.
- Die Herstellung der Neigung war auch durch im rechten Winkel gebaute Holzlehren möglich, die die Baumeister innen und außen an den Grundseiten ansetzten (Bild 19). Bei den Außenlehren ergab sich die Neigung durch Anlegen der oberen Quaderecken an die Hypothenuse der Lehre. Die Innenlehren mußten an zwei sich gegenüberliegenden Pyramidenseiten aufgestellt werden (Bild 20). Die Neigung wurde durch Fluchten über in den Lehren eingebaute Stufen oder Kerbmarken bestimmt. Bei größeren Lehren (30 bis 40 m Höhe) war es möglich, die Neigung durch Fluchten über die gebauten Stufen bis zur Spitze zu verlängern.
- Jeder Punkt der Neigung konnte durch eine Staffelmessung abgesteckt oder geprüft werden (Bild 21). Die Maße hierzu lagen durch Konstruktion und Messung im Querschnitt vor [13].
- Durch Fluchten oder Tafeln konnten die Baumeister feststellen, ob für den jeweils fertigen Abschnitt eine durchgehende Neigung bestand. Bei exaktem Stufeneinbau mußten die Eckkanten der Quader eine Flucht bilden.

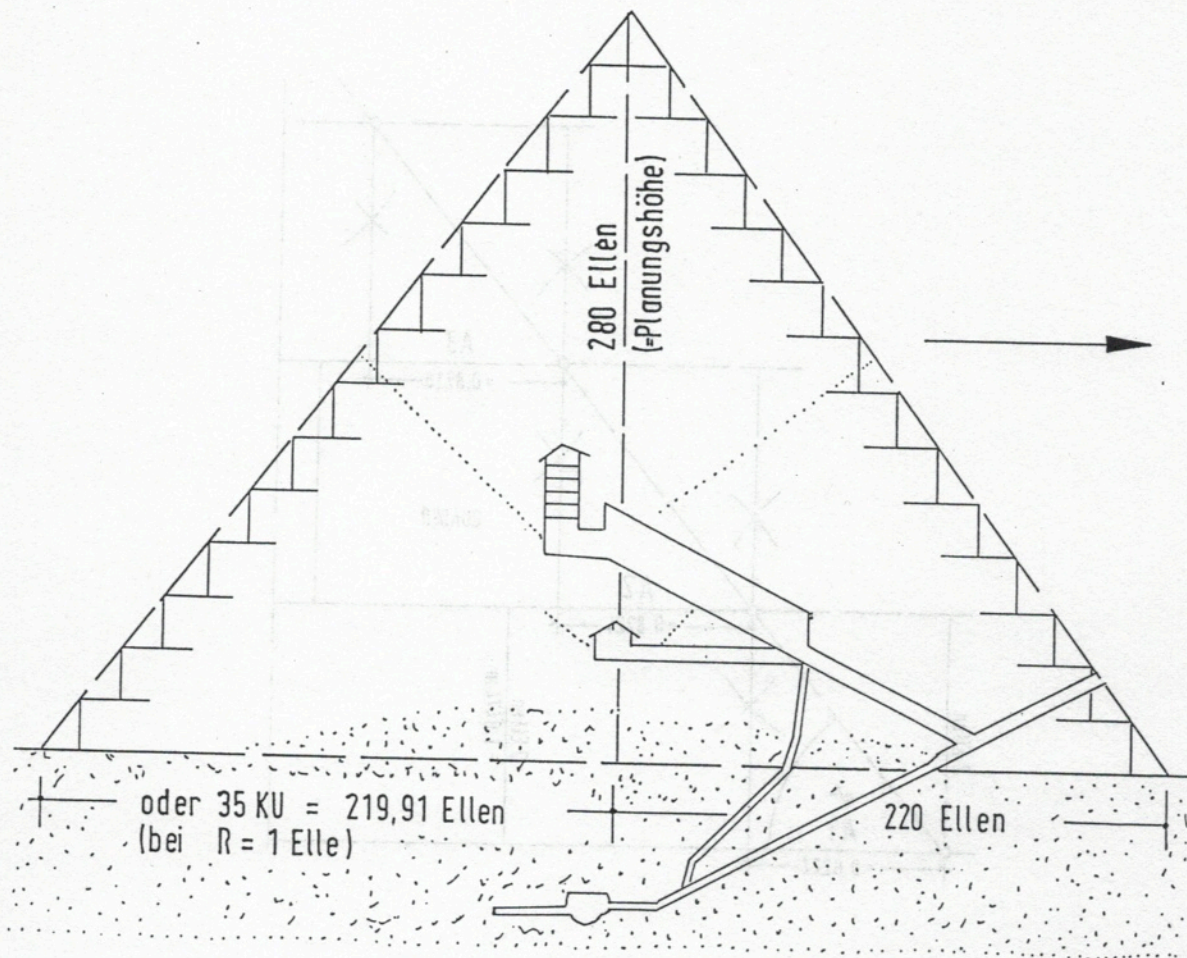


Bild 17

Schnitt durch die Pyramide. Im Maßstab 1:1 in der Waagerechten abgesteckt, ist er die Grundlage für Detailkonstruktionen und Entnahme der Absteckmaße durch Messung

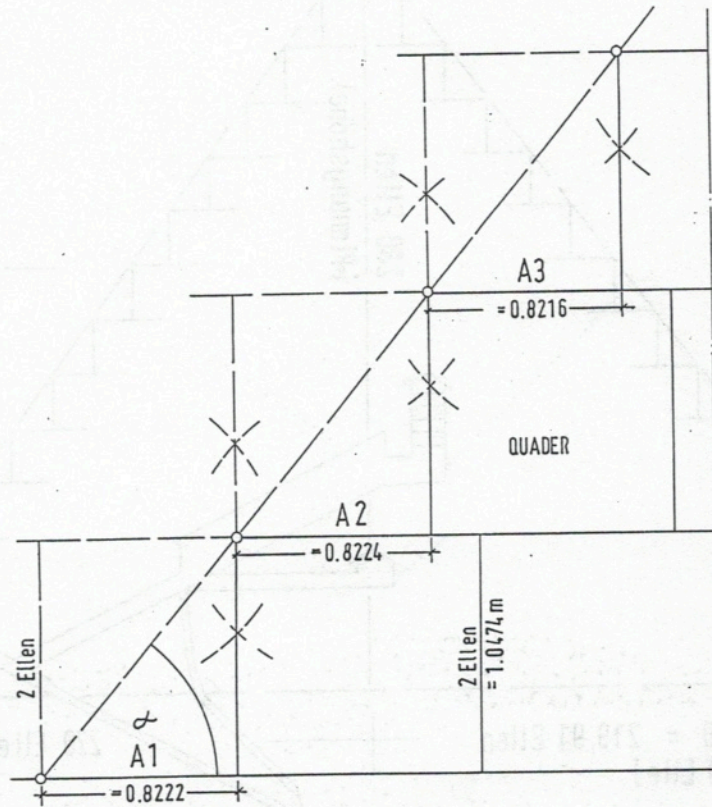


Bild 18

Schema zur graphischen Ermittlung der
 Stufenbreite A (Mittel aus A_1 , A_2 , A_3)
 $= 0,8221$, A (gerechnet) $= 0,8230$

Bild 19

Konstruktion der Außen- und Innenlehre am Querschnitt 1:1.

A = Außen- und B = Innenlehre.

Die Außenlehre entspricht der Rücksprungberechnung der im Papyrus Rhind überlieferten Pyramidenaufgaben.

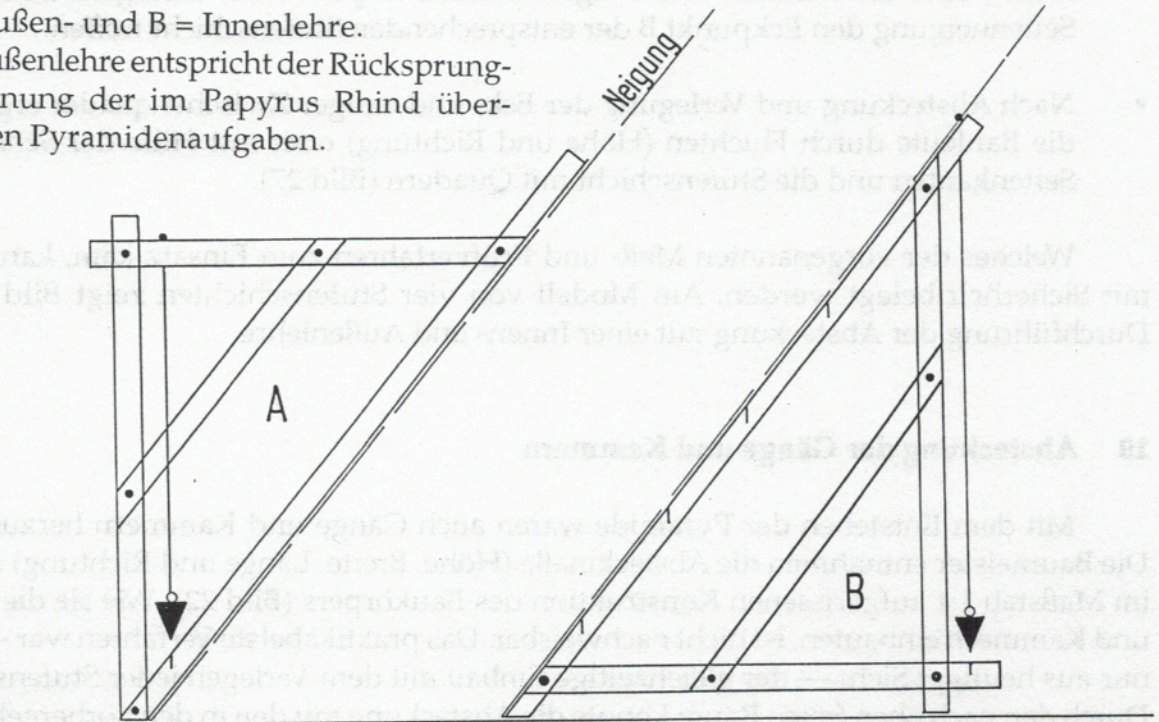


Bild 20

Absteckvorgänge an einer Pyramidenecke:

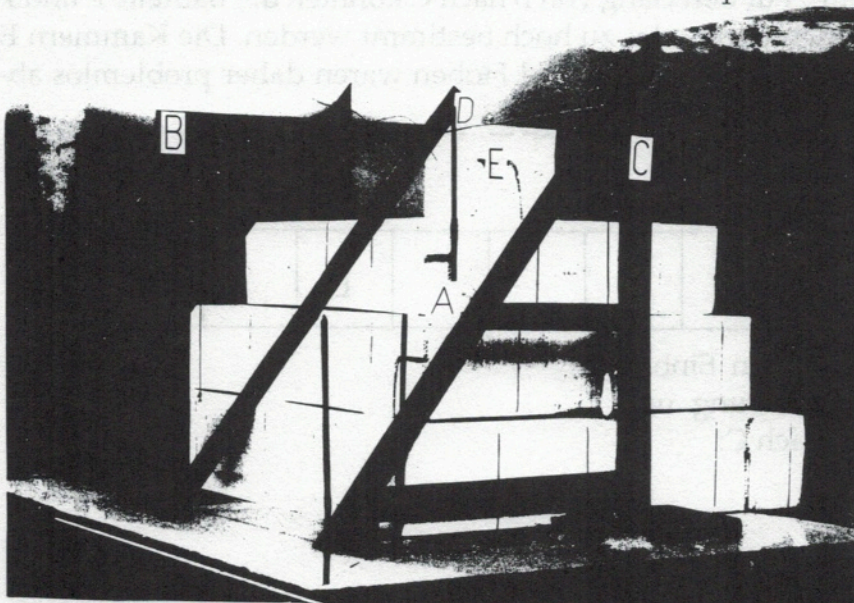
A = Richtung der Seitenkanten (Fluchtstäbe)

B = Außenlehre

C = Innenlehre

D = Richtschnur

E = Eckquader der vierten Stufenschicht



- Eine weitere Prüfung war durch Parallelabsteckung möglich. In dem Beispiel (Bild 16) wird dazu die Länge von 40 Stufenbreiten parallel zur Grundseite abgesteckt. Die Flucht über die Parallel- und Diagonalabsteckung muß bei richtigem Einbau der Seitenneigung den Eckpunkt B der entsprechenden Stufenschicht treffen.
- Nach Absteckung und Verlegung der Eck- und einiger Zwischenquader ergänzten die Bauleute durch Fluchten (Höhe und Richtung) oder mit Hilfe der Schnur die Seitenkanten und die Stufenschicht mit Quadern (Bild 27).

Welches der vorgenannten Meß- und Prüfverfahren zum Einsatz kam, kann nicht mit Sicherheit belegt werden. Am Modell von vier Stufenschichten zeigt Bild 20 die Durchführung der Absteckung mit einer Innen- und Außenlehre.

10 Absteckung der Gänge und Kammern

Mit dem Entstehen der Pyramide waren auch Gänge und Kammern herzustellen. Die Baumeister entnahmen die Absteckmaße (Höhe, Breite, Länge und Richtung) aus der im Maßstab 1:1 aufgerissenen Konstruktion des Baukörpers (Bild 22). Wie sie die Gänge und Kammern einbauten, ist nicht nachweisbar. Das praktikabelste Verfahren war — nicht nur aus heutiger Sicht — der gleichzeitige Einbau mit dem Verlegen jeder Stufenschicht. Durch den nach oben freien Raum konnte die Absteckung mit den in den vorhergehenden Abschnitten angeführten Verfahren und Geräten erfolgen. Die Richtungsübertragung in die Pyramide geschah durch Fluchten von der außerhalb des Bauraums gesicherten Mittelachse (Bild 22, Punkt A). Für die Längen- und Höhenbestimmung aller Absteckpunkte (z.B. Anfang und Ende der Gänge) war die Staffelmessung das einzig mögliche Verfahren. Dabei mußte zuerst Punkt B auf dem entsprechenden Quader und dann die Punkte C und D auf einem Gerüst vermarktet werden. Die Neigung beider Gänge zeigt etwa das Verhältnis 1:2. Eine in diesem Verhältnis gebaute rechtwinklige Lehre (Bild 22 rechts) vereinfacht den Absteck- und Bauvorgang. An Punkt B angesetzt, gibt sie die Neigung der Gänge an. Mit eingespieltem Lot in die Waage gebracht, werden die Quader und Steine für die Grundfläche an der Hypothense der Lehre angelegt. Die dabei möglichen Geräte- und Meßfehler sind ohne Bedeutung, da der Gang von B nach D automatisch auf die Seitenfläche der Pyramide trifft. Für den Gang von B nach C konnten die Bauteile E und F um ein geringes Höhenmaß zu niedrig oder zu hoch bestimmt werden. Die Kammern E und F liegen in der Horizontalen. Ihre Längen und Höhen waren daher problemlos abzustecken.

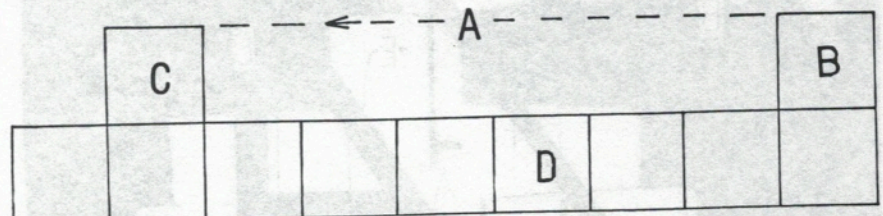


Bild 27

Schematische Darstellung für den Einbau der Zwischenquader nach Richtung und Höhe durch Fluchten von B nach C:

A = Fluchtlinie

B = Eckquader

C = Zwischenquader

D = bereits verlegte Quaderschicht

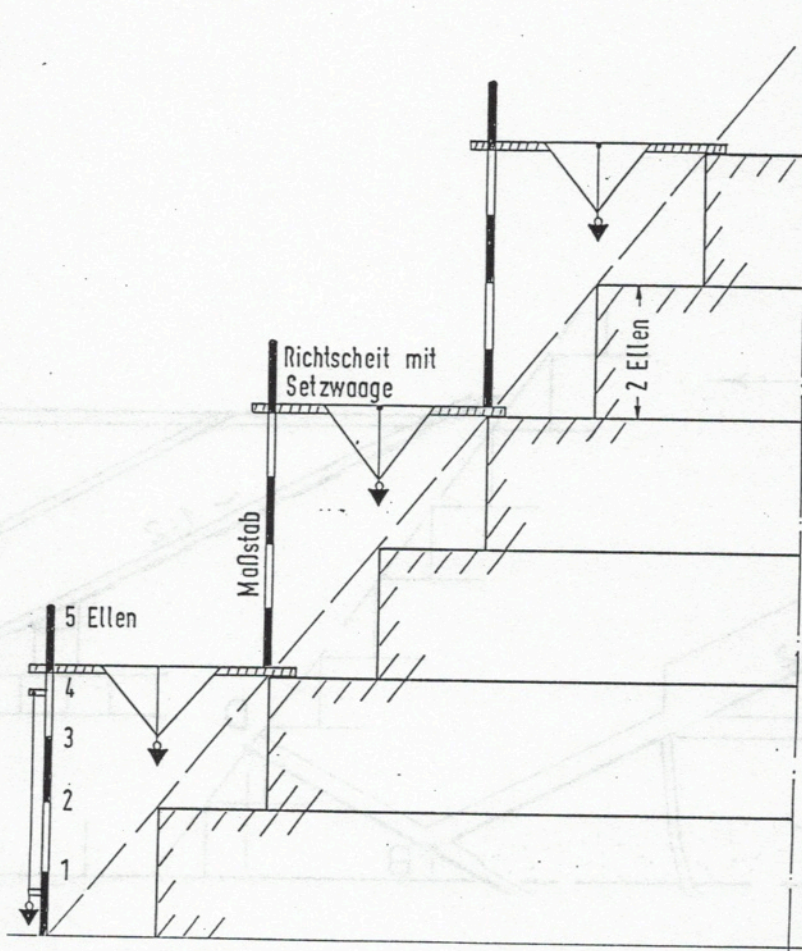


Bild 21
 Prüfung der Neigung mit Maßstab,
 Richtscheit und Setzwaage

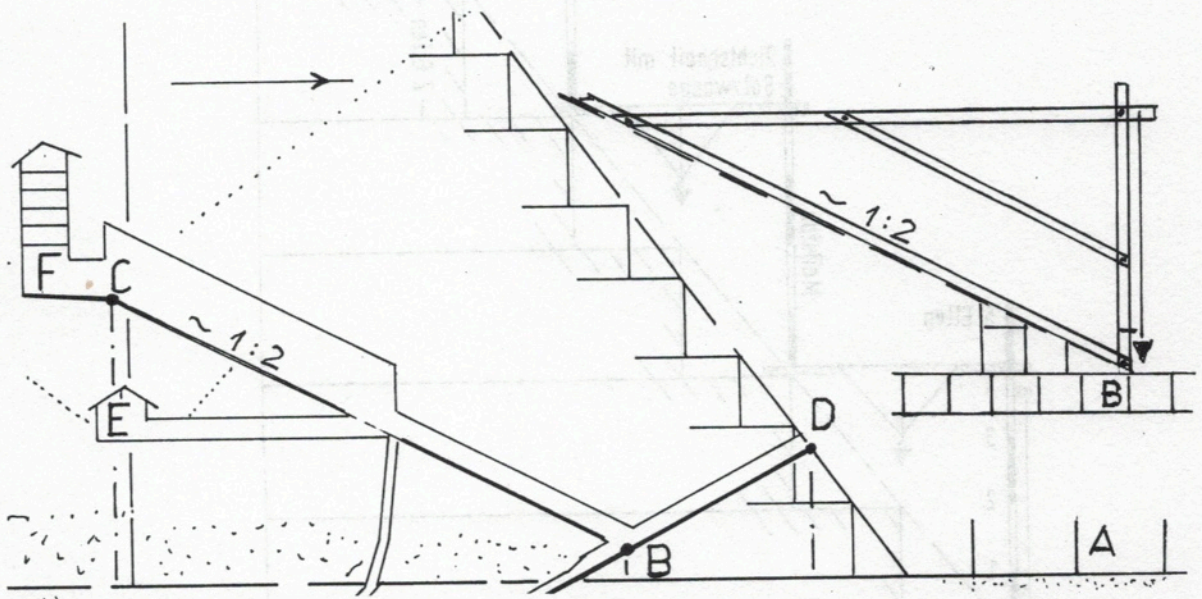


Bild 22

Absteckschema für den Einbau der Gänge und Kammern mit einer Neigungslehre (rechts im Bild)

11 Fehleranalyse für den Einbau der Seitenneigungen

Wie die Grundrißdaten der Pyramide zeigen (Bild 4), führten die Erbauer eine gute Vermessung durch [14]. Das gilt besonders für die Absteckung der Rechtwinkel und die Höhenlage des Grundsteinpflasters (vgl. Abschnitt 7). Die Richtung der Seitenkanten (Treffpunkt in der Pyramidenspitze) wurde durch Fluchten über die verlängerten Diagonalen bestimmt, das mit einem Richtungsfehler von ± 2 cm möglich war.

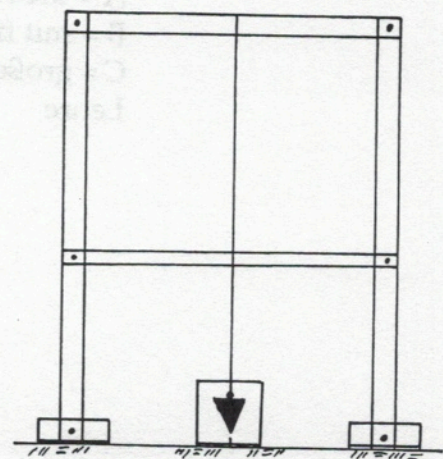
Eine Analyse der beim Einbau der Seitenneigung auftretenden Fehler ist schwierig, wenn der Vorgang ohne einen Zielpunkt auf der Pyramidenspitze erfolgte. Die in Abschnitt 9 beschriebenen Verfahren, die Neigung von den Grundseiten aus hochzubauen, bedingen größere Fehler, die sich aus dem Bau der Geräte und den Meßvorgängen ergeben. Im ungünstigsten Fall summieren sie sich durch die zahlreichen Meßvorgänge zur Spitze hin. Das bedeutet, daß die Planungshöhe der Pyramide über- oder unterschritten wurde. Das Beispiel (Bild 23) zeigt eine kleine Innenlehre mit einem fiktiven Fehler von $+3$ cm für die Grundlinie und -4 cm für die Höhe. Ohne sporadische Kontrollmessungen (Staffelmessung für Länge und Höhe) würde die Planungshöhe der Pyramide um fast 3 m unterschritten. Bei einer großen Innenlehre beträgt der Fehler, wenn über die eingebauten Stufenschichten bis zur Spitze gefluchtet wird, nur $-0,307$ m (Bild 23).

Beim Einbau der Neigung mit der Stufenbreite A (Bild 18) — im Querschnitt mit $0,8221$ m ermittelt und mit $0,8230$ m gerechnet — ergibt sich eine um $0,16$ m größere Höhe der Pyramide. Dieses Verfahren ist wegen der unregelmäßigen Quaderoberflächen und durch die beim Absetzen der Stufenbreite auftretenden Fehler nur bedingt geeignet, da die Fehler durch Kontrollmessungen (Bild 21) nur schwer auszugleichen sind.

Die fiktiven Beispiele zeigen, daß für die Verfahren zur Absteckung der Seitenneigung eine exakte Fehleranalyse nicht möglich ist. Die Einmessung einer Anzahl Quaderoberkanten — für jede fünfte oder zehnte Stufenschicht — ergeben Meßdaten, die genauere Aussagen gestatten. Als Profile aufgetragen, zeigen sie die gebaute Neigung, lassen Knicke erkennen und ermöglichen Geradenausgleiche, mit denen die gebaute Höhe der Pyramide rechnerisch bestimmt werden kann (Bild 24). Mit den Höhendaten aufgetragene Langprofile der Stufenschichten zeigen, wie genau die Höhe eingehalten wurde. Im Vergleich miteinander ermöglichen sie Aussagen über den guten oder schlechten Einbau der Seitenneigungen [15].

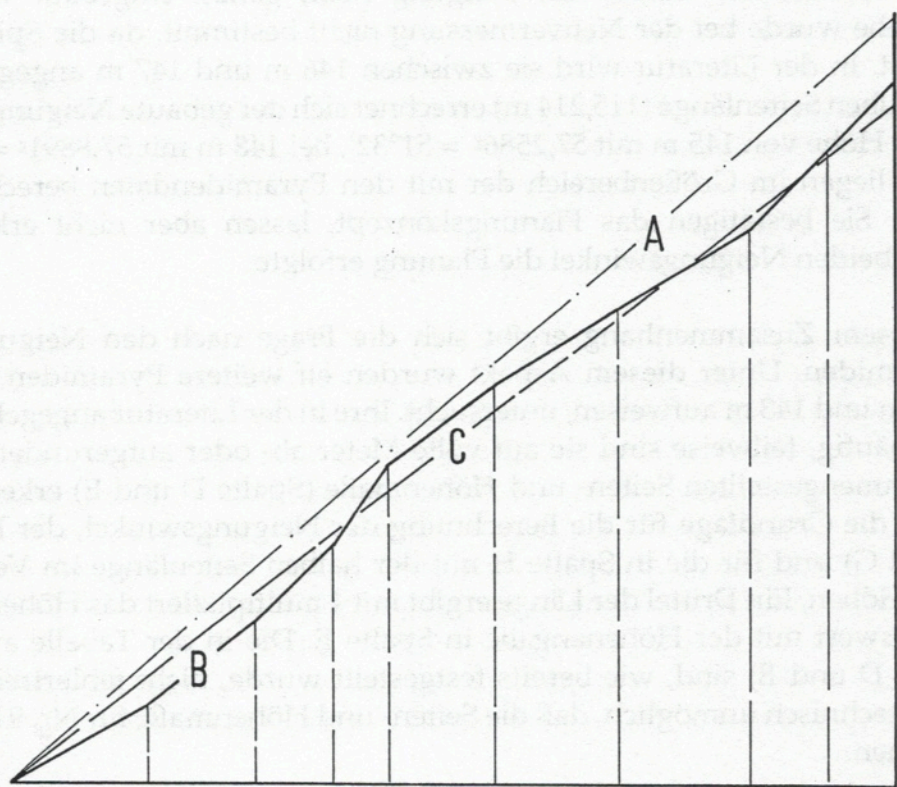
Bild 26

Ein Richtgestell mit schwerem, beweglichem Lot ermöglicht ein genaueres Richten und Fluchten



Aus dem Planungsneigung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$ ergibt sich die Neigungswinkel $\alpha = 44,7^\circ$. Wie in der Abbildung nachgewiesen, kann die bei der Ableitung erhaltene Funktion $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ durch die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ bestätigt werden. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$.

Aus dem Neigungswinkel $\alpha = 44,7^\circ$ ergibt sich die Neigungswinkel $\beta = 44,7^\circ$. Wie in der Abbildung nachgewiesen, kann die bei der Ableitung erhaltene Funktion $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ durch die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ bestätigt werden. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$.



Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$.

Bild 24
 Schema für einen Geradenausgleich:
 A = Planungsneigung
 B = gebaute Neigung
 C = Geradenausgleich

Aus dem Neigungswinkel $\alpha = 44,7^\circ$ ergibt sich die Neigungswinkel $\beta = 44,7^\circ$. Wie in der Abbildung nachgewiesen, kann die bei der Ableitung erhaltene Funktion $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ durch die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ bestätigt werden. Die Ableitung $f'(x) = 440 \cdot \cos(x) + 240 \cdot \sin(x)$ ist die Ableitung der Funktion $f(x) = 440 \cdot \sin(x) - 240 \cdot \cos(x)$.

12 Vergleich mit den Neigungswinkeln anderer Pyramiden

Aus den Planungsdaten der Pyramide (Seitenlänge = 440 Ellen, Höhe = 280 Ellen) errechnet sich der Neigungswinkel mit $57,6031^s = 51^\circ 50'$, aus der Kreiszahl Pi mit $57,6155^s = 51^\circ 51'$ [16]. Wie in der Fehleranalyse nachgewiesen, konnte wegen der bei der Absteckung auftretenden Fehler die Neigung nicht genau eingebaut werden. Die Pyramidenhöhe wurde bei der Neuvermessung nicht bestimmt, da die Spitze um 9 m abgetragen ist. In der Literatur wird sie zwischen 146 m und 147 m angegeben. Unter Ansatz der halben Seitenlänge (115,214 m) errechnet sich der gebaute Neigungswinkel bei einer fiktiven Höhe von 145 m mit $57,2586^s = 51^\circ 32'$, bei 148 m mit $57,8891^s = 52^\circ 06'$. Die Winkelwerte liegen im Größenbereich der mit den Pyramidendaten berechneten Neigungswinkel. Sie bestätigen das Planungskonzept, lassen aber nicht erkennen, mit welchem der beiden Neigungswinkel die Planung erfolgte.

Aus diesem Zusammenhang ergibt sich die Frage nach den Neigungswinkeln anderer Pyramiden. Unter diesem Aspekt wurden elf weitere Pyramiden, die Höhen zwischen 50 m und 143 m aufweisen, untersucht. Ihre in der Literatur angegebenen Maße divergieren häufig, teilweise sind sie auf volle Meter ab- oder aufgerundet, wie die in Bild 25 zusammengestellten Seiten- und Höhenmaße (Spalte D und E) erkennen lassen [17]. Sie sind die Grundlage für die Berechnung der Neigungswinkel, der Kreiszahl Pi (Spalte F und G) und für die in Spalte H mit der halben Seitenlänge im Verhältnis 3:4 berechneten Höhen. Ein Drittel der Länge ergibt mit 4 multipliziert das Höhenmaß. Es ist ein Vergleichswert mit der Höhenangabe in Spalte E. Die in der Tabelle aufgeführten Maße (Spalte D und E) sind, wie bereits festgestellt wurde, nicht fehlerfrei. Es ist z.B. vermessungstechnisch unmöglich, daß die Seiten- und Höhenmaße für Nr. 9 bis 12 völlig übereinstimmen.

Die Maße reichen jedoch aus, um die Neigungswinkel annähernd zu bestimmen. Dabei zeigt sich, daß drei Pyramiden (Nr. 1, 4 und 5) Neigungswinkel aufweisen, die im Größenbereich der großen Pyramide liegen. Daraus läßt sich folgern, wenn nicht andere Fakten dagegen sprechen, daß die Kreiszahl Pi (Ansatz des Kreisradius als Höhe und der sich daraus ergebende Kreisumfang) das Planungskonzept dieser Pyramiden bildet.

Acht später gebaute Pyramiden (Nr. 2 und 6 bis 12) zeigen ein einfacheres Planungsschema. Ihre Neigungswinkel bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Höhe (Gegenkathete) zur halben Grundseite (Ankathete) im Verhältnis 4:3 steht. Mit der Hypotenuseneinheit 5 zeigen sie das einfache Verfahren der Absteckung eines Rechtwinkels mit der Zwölfknotenschnur [18] [19]. Aus dem Verhältnis 4:3 errechnet sich der Neigungswinkel der acht Pyramiden mit $59,0338^s = 53^\circ 07' 50''$.

A	B	C	D	E	F	G	H
Nr.	Pharao	Dynastie	Seite m	Höhe m	Neigungs- winkel g	Pi aus Seite und Höhe	Höhe m
1	Huni (?)	3	147,00	93,50	57,5880	3,144385	
2	Cheops	4	230,35	146,65	57,6165	3,141493	
3	Chephren	4	214,50	143,50	59,1401	2,989530	143,00
4	Mykerinos	4	105,00	65,50	56,9854	3,206107	
5	Niuserre	5	81,00	51,50	57,5758	3,145631	
6	Neferirkare	5	105,00	70,00	59,0334	3,000000	70,00
7	Teti	6	78,50	52,00	58,8380	3,012308	52,33
8	Userkaf	5	73,50	49,00	59,0334	3,000000	49,00
9	Pepi I.	6	78,50	52,50	59,1306	2,990476	52,33
10	Isesi	5					
11	Merenre	6					
12	Pepi II	6					

Bild 25

Tabelle mit den Daten von 12 Pyramiden,
nach [17]

13 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Abhandlung ist der Versuch eines Vermessungsingenieurs, aus der Kenntnis der alten Vermessung sowie unter dem Aspekt des handwerklich Machbaren und technisch Möglichen zur Zeit des Pyramidenbaus die Arbeit seiner Berufsvorgänger darzustellen. Im Ergebnis bleibt festzustellen:

- Die Neuvermessung belegt, daß die ägyptischen Baumeister eine hohe Genauigkeit erreichten.
- Die dargestellten Geräte und Meßverfahren zeigen die Meßkunst dieser Epoche.
- Mit Nachbauten durchgeführte Experimente bestätigen die Tauglichkeit der Geräte und Verfahren.
- Die Analysen zeigen die für den Bau der Pyramide möglichen Meß- und Absteckverfahren. Sie sind nicht zweifelsfrei, denn die Baumeister könnten Verfahren benutzt haben, die wir nicht kennen.
- Ob der Einbau der Seitenneigungen mit oder ohne einen Zielpunkt auf der Pyramidenspitze erfolgte, läßt sich nicht beantworten. Hierzu wäre eine Vermessung des gesamten Baukörpers notwendig, die genaue Auskunft über einen glatten oder leicht geknickten Einbau der Seitenneigung gibt.
- Mehrere Aussagen erreichen einen hohen Wahrscheinlichkeitsgrad.

Die Pyramide ist überlieferte Geometrie in Stein. Die Analysen ihrer Vermessung sind daher nicht nur ein Beitrag für die archäologische und geodätische Forschung, sie fördern auch das Verständnis für die Geometrie. Die Untersuchungen bieten allerdings nur Lösungsmöglichkeiten an und geben Anreize für weitere Forschungen.

Anmerkungen und Literatur

- [1] Borchartd, L.: Gegen die Zahlenmystik an der großen Pyramide bei Gise. Berlin 1922
- [2] Borchartd, L.: Längen und Richtungen der vier Grundkanten der großen Pyramide bei Gise. Berlin 1926
- [3] Diese Methode stellte Borchartd an allen von ihm in Ägypten untersuchten Haussteinbauten fest.
- [4] Leopold, E.: Die Pyramiden von Sakkara und Giseh. Herrsching 1989
- [5] Mendelssohn, K.: Die Rätsel der Pyramiden. Bergisch Gladbach 1974
- [6] Ions, V.: Die Götter und Mythen Ägyptens. Klagenfurt 1982
- [7] Die horizontale Streckenmessung mit dem Meßrad wurde erstmals von dem englischen Physiker Connolly untersucht und vorgeschlagen [5]
Unabhängig vom Konstruktionsfehler bedingt der Meßvorgang mit dem Rad im Vergleich mit der Latten- oder Seilmessung einen erheblich größeren Fehler, der selbst bei Ausführung der Messung in einer Holzrinne (glatte Fläche) gegeben ist.
- [8] Kobold, F.: Sur l'implantation de grandes ouvrages de l'Antiquité. In: Verm., Photogramm., Kulturtechn., 1985
- [9] Borchartd, L.: Die ägyptische Zeitmessung. Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren. Berlin 1920
- [10] Peters, K.: Nivelliergeräte des Altertums. In: Der Vermessungsingenieur, 1987, S. 97-109
- [11] Robert, A.: Annales du Service des Antiquités de l'Égypte, 1899. Er stellte darin erstmals diese These auf. Die Meßverfahren für den Bau des Pyramidenkerns wurden in der Literatur bisher nicht angesprochen. Der Zielpunkt auf der Spitze ergibt sich durch Höhenmessungen und durch Fluchten über die verlängerten Diagonalen (Bild 17) .
- [12] Das Ritzverfahren im Maßstab 1:1 wurde im Altertum zur Konstruktion von Bauteilen allgemein angewandt.
- [13] Nach [10] beträgt der Höhenfehler für eine Teststrecke von 24 m Länge und 11 m Höhe bei Messung in zwei Lagen im Mittel von vier Ausführungen nur 3 mm.
- [14] Die von den englischen Landmessern durch Verlängern der Teilstrecken (26 bis 58 m) bestimmten Daten des Pyramidenquadrats sind nicht unbedingt als absolut anzusehen, da über eine kurze Strecke eine längere bestimmt wurde [8].
- [15] Durch Spannen einer sehr langen Schnur über die Quaderoberkanten ist eine einfache Prüfung möglich. Eine Anzahl kleiner Knicke würde die These stützen, daß die Neigung ohne einen Zielpunkt auf der Spitze eingebaut wurde.