

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) – Mathematiker mit Weltruhm

Willi Freeden

Technische Universität Kaiserslautern

Dortmunder U

6. Oktober, 2025



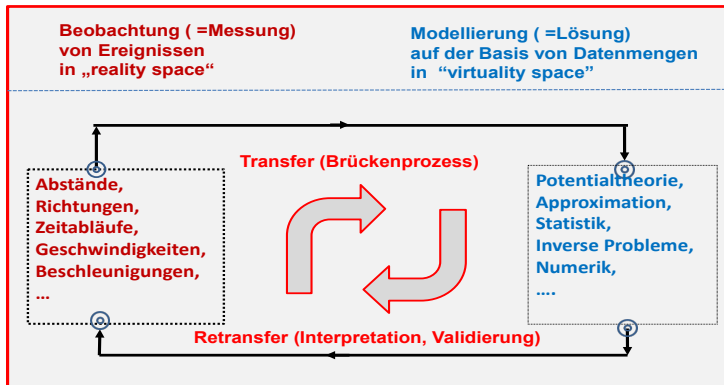


Gauss und sein Werk:

- Princeps Mathematicorum
- Essentielle Beiträge in Mathematik, Mechanik, Geodäsie, Geomagnetik, Elektrodynamik, Brückenbauer zwischen Mathematik und Geowissenschaften
- Gemessen am wissenschaftlichen Potential keine hohe Publikations-tätigkeit, aber gewaltiger Nachlass

Wissenschaftlicher Mediator:

Vermittler von Brückenprozessen durch Aufzeigen genialer Kreisläufe von Abstraktion und Konkretisierung



Vorgehensweise seit Gauss:

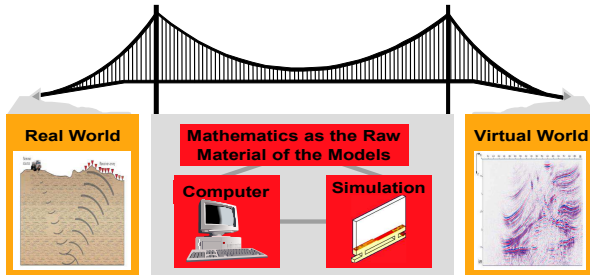
- **Mathematische Modellbildung:** Das praktische Problem wird in die Sprache der Mathematik übersetzt. Dies erfordert die Zusammenarbeit zwischen Anwendern und Mathematikern.
- **Mathematische Analyse:** Die resultierende mathematische Aufgabe wird auf ihre “Wohlgestelltheit” (d.h. Existenz, Eindeutigkeit, Abhängigkeit von den Eingabedaten) überprüft.
- **Entwicklung und Ausführung eines mathematischen Lösungsverfahrens:** Geeignete analytische, algebraische und/oder numerische Methoden und Verfahren zur konkreten Lösung müssen der Aufgabenstellung angepasst oder gegebenenfalls neue Methoden entwickelt werden.
- **Rückübertragung aus der Sprache der Mathematik in die Anwendung:** Das mathematische Modell wird an realen Daten validiert und gegebenenfalls modifiziert. Eine gute Übereinstimmung von Modell und Realität wird angestrebt.

Ziel:

Vorteil und Nutzen der mathematischen Vorgehensweise

gemäß dem Gaußschen Vorbild

sollen in der besseren, schnelleren, billigeren und sichereren Problemlösung bestehen, und zwar mit den bereits genannten Mitteln der Simulation, der Visualisierung und der Reduktion von Datenfluten.



W. Freeden: Geomathematics: Its Role, Its Aim, and Its Potential. in: Handbook of Geomathematics, Vol. 1, 2nd ed., W. Freeden, M.Z. Nashed, T. Sonar, Eds., 3-79, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2015.

Zitat H. Moritz:

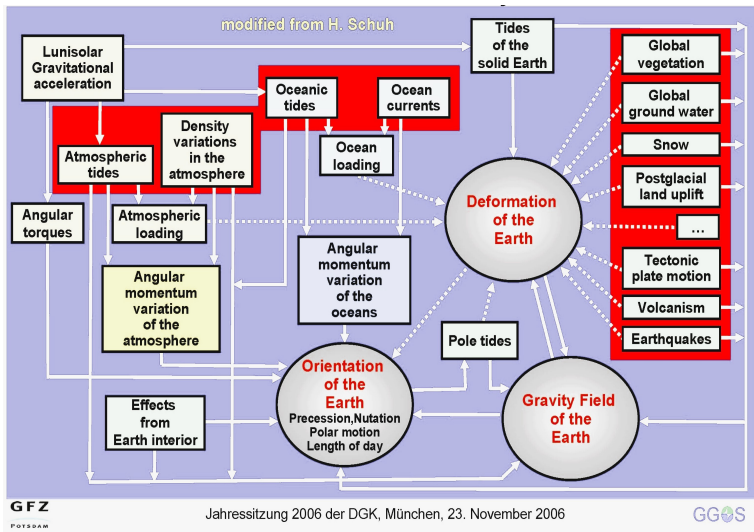
- The old days are gone when Carl Friedrich Gauss himself developed his epoch-making theories inspired by his geodetic concerns. Gone also are the days when Felix Klein (1849-1925), one of the leading mathematicians of his time, called geodesy “that geometrical discipline in which the idea of approximation mathematics has found its clearest and most consequent expression”. Gone are the times when Henri Poincaré (1854-1912) investigated problems of astronomy and geodesy and actively participated in geodetic life.

So, we are led to the conclusion that it apparently is the fault of today's mathematicians that they provide mathematics in an increasingly abstract way, without any regard to possible geodetic applications and, so to say out of touch with reality? In part, certainly, they are out of reality.

Zitat H. Moritz:

- An increasing abstraction is necessary to achieve progress, not only in mathematics, but also in today's geodesy. What is frequently overlooked by potential geodetic users of mathematical theory is that the modern abstract methods of mathematics, if properly understood, provide an extremely powerful tool for the solution of applied problems which could not be solved otherwise: the more abstract a method is, the more it is sometimes suitable for a concrete problem.

Thus, we may also conclude that it apparently is the fault of modern geodesists to be restricted to measurement tasks, without any regard to virtuality space providing valuable mathematical concepts and, so to say, also out of touch with virtuality?



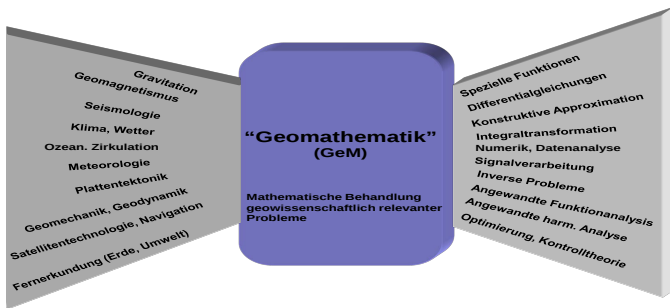
Heutige geowissenschaftliche Kreisläufe sind zu komplex in dem Transfer von “Reality” to “Virtuality” und umgekehrt, um von nur einem genialen Geowissenschaftler (wie etwa Gauss zu seiner Zeit!) beherrscht zu werden.

Nach Meinung des Vortragenden brauchen wir ein

"geowissenschaftliches Konsortium",

in dem sich die Partner gleichberechtigt widerfinden.

Damit sich die Mathematik in ein solches Konsortium adäquat einbringen kann, hat der Vortragende die “G e o m a t h e m a t i k” voran getrieben, mit Lehrstühlen in Kaiserslautern, Siegen, Freiburg.



Geomathematik aus heutiger Sicht widmet sich den qualitativen und quantitativen Eigenschaften der aktuell vorhandenen oder möglichen Strukturen unseres Erdsystems. Sie steht Pate für den Begriff von Wissenschaftlichkeit in der Erdsystemforschung. Das System Erde besteht dabei aus einer Anzahl von Elementen, die selbst wieder ein System darstellen. Die Komplexität des Gesamtsystems Erde wird bestimmt durch interagierende physikalische, biologische, chemische Prozesse, die Energie, Material und Information transformieren und transportieren. Es ist gekennzeichnet durch Interdependenzen natürlicher Prozesse mit sozialen und ökonomischen Prozessen, die zur gegenseitigen Beeinflussung führen. Die Erde ist ein Musterbeispiel für ein *komplexes* System mit interagierenden natürlichen und sozio-ökonomischen Subsystemen.

Subjektive Auswahl (des Vortragenden):

Kreisproblem und Geosampling

Gaussische Integration und Geokubatur

Gausscher Integralsatz und Geoidbestimmung

Gaussche “Least Squares” Methode und Regularisierung Inverser Probleme

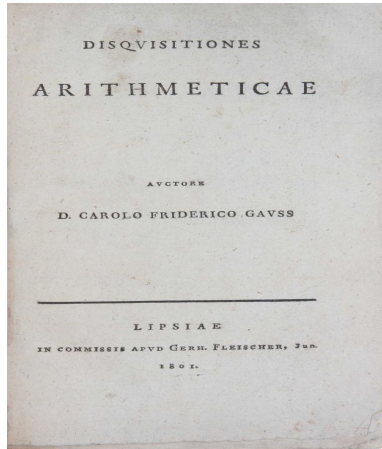
Subjektive Auswahl (des Vortragenden):

Kreisproblem und Geosampling

Gaussssche Integration und Geokubatur

Gausssscher Integralsatz und Geoidbestimmung

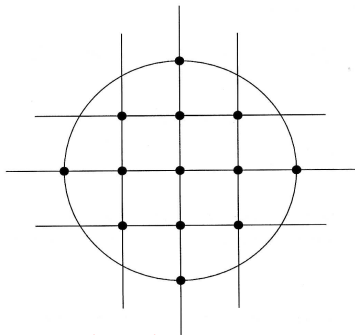
“Least Squares” Methode und Regularisierung Inverser Probleme



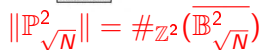
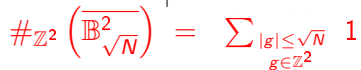
Gauss Zitat:

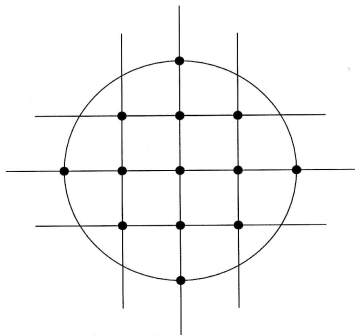
“Mathematik ist die Königin der Wissenschaften, und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik.”

C.F. Gauss: “Disquisitiones arithmeticae”, original latin edition by Gerhard Fleischer, Lipsiae (Leipzig) 1801 (668 Seiten, Oktavformat), first reprint as first issue of “Gesamtausgabe Carl Friedrich Gauss: Werke. Band 1, Dieterich, Göttingen 1863”, reprint by Springer Verlag, New York Heidelberg 1986.

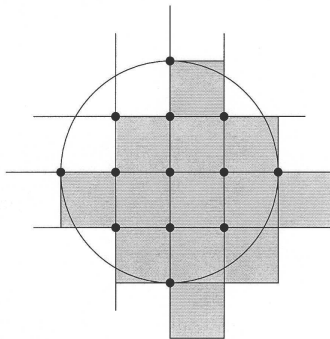


$$\#\mathbb{Z}^2 \left(\overline{\mathbb{B}^2_{\sqrt{N}}} \right) = \sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} 1$$



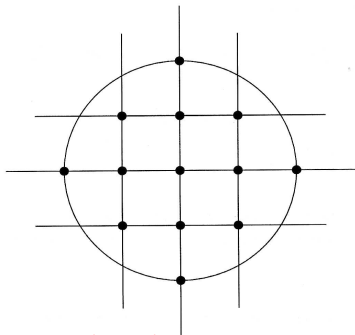


$$\#\mathbb{Z}^2 \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = \sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} 1$$

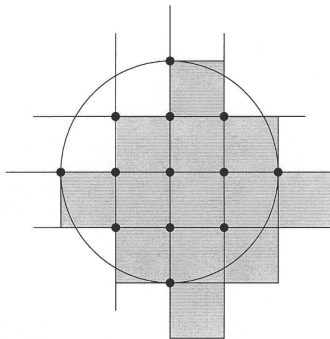


$$\|\mathbb{P}_{\sqrt{N}}^2\| = \#\mathbb{Z}^2 \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right)$$

$$\pi \left(\sqrt{N} - \sqrt{2} \right)^2 \leq \#\mathbb{Z}^2 \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) \leq \pi \left(\sqrt{N} + \sqrt{2} \right)^2$$



$$\#_{\mathbb{Z}^2}(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2}) = \sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} 1$$



$$\|\mathbb{P}_{\sqrt{N}}^2\| = \#_{\mathbb{Z}^2}(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2})$$

$$\#_{\mathbb{Z}^2}(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2}) = \pi N + O(\sqrt{N}) \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#_{\mathbb{Z}^2}(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2})}{N} = \pi$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\mathbb{Z}^2(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2})}{N} = \pi$$

Numerische Rechnungen (course notes to www.math.uga.edu/~pete/4400FULL.pdf) zeigen

$$\frac{\#\mathbb{Z}^2(\overline{\mathbb{B}_{10}^2})}{100} = 3.17$$

$$\frac{\#\mathbb{Z}^2(\overline{\mathbb{B}_{100}^2})}{10000} = 3.1417 \text{ (Gauss)}$$

$$\frac{\#\mathbb{Z}^2(\overline{\mathbb{B}_{1000}^2})}{1000000} = 3.141549$$

$$\frac{\#\mathbb{Z}^2(\overline{\mathbb{B}_{10000}^2})}{100000000} = 3.14159053.$$

$$E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) - \pi N$$

Numerische Rechnungen:

$$N = 10^2 : \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = 317, \pi N \approx 314, E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) \approx 2.8407$$

$$N = 100^2 : \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = 31417, \pi N \approx 31415.926, E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) \approx 1.0734$$

$$N = 1000^2 : \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = 3141549, \pi N \approx 3141592.653, E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) \approx 43.653$$

$$N = 10000^2 : \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = 314159053, \pi N \approx 314159265.358, E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) \approx 212.3589$$

Die Ordnung des Fehlers $E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right)$ ist bis heute unbekannt !!!

Hardysche Vermutung (1916):

$$E_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) = \#_{\mathbb{Z}^2} \left(\overline{\mathbb{B}_{\sqrt{N}}^2} \right) - \pi N = O \left(N^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \right) \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

$$\sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} ' 1 = \pi N + \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{N} \sum_{\substack{0 < |h| \leq R \\ h \in \mathbb{Z}^2}} \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$\sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} ' 1 = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} 1 \cdot \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$1 + \underbrace{\sum_{\substack{0 < |g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} ' 1}_{\text{aliasing}} = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} 1 \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$N < 1: \quad 1 = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} 1 \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

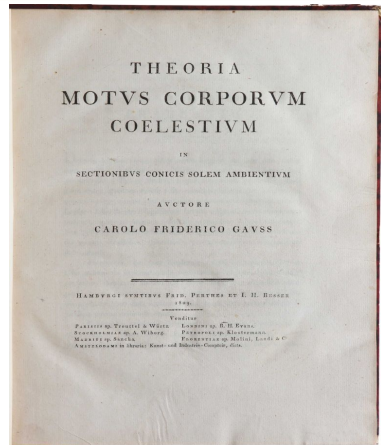
$$\sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} '1 = \pi N + \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{N} \sum_{\substack{0 < |h| \leq R \\ h \in \mathbb{Z}^2}} \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$\sum_{\substack{|g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} '1 = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} 1 \cdot \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$1 + \underbrace{\sum_{\substack{0 < |g| \leq \sqrt{N} \\ g \in \mathbb{Z}^2}} '1}_{\text{aliasing}} = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} 1 \cdot \frac{J_1(2\pi|h|\sqrt{N})}{|h|}$$

$$F(x) = \sqrt{N} \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} F(h) \frac{J_1(2\pi|h-x|\sqrt{N})}{|h|}$$

(Shannonsches Abtasttheorem)



Gauss Zitat (nach G.W. Stewart 1987: Theory of the Combination of Observations Least subject to Errors):
“Quoties multitudo aequationum conditionalium permagna est, determinatio correlatorum . . .” (“When the number of conditional equations is very large, the calculation of the correlates etc. by direct elimination becomes so laborious that the endurance of the calculator is not equal to the task. In such cases it is often better to use the theory to compute the complete adjustment by successive approximation . . .”)

C.F. Gauss: “Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium”, original latin edition by Friedrich Perthes and I.H. Besser, Hamburg, 1809, also: “Carl Friedrich Gauss: Werke, herausgegeben von der (Königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen” (Göttinger Digitalisierungszentrum).

X und Y seien Hilbert Räume. Sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator, dessen Wertebereich $\mathcal{R}(A)$ nicht notwendiger Weise abgeschlossen ist. Dann haben wir die Orthogonalzerlegungen $X = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^\perp$, $Y = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, und $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$, wobei $\mathcal{N}(A)^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{N}(A)$ ist. $\overline{\mathcal{R}(A)}$ ist der Abschluss des Wertebereiches von A , und A^* ist der adjungierte Operator von A .

Wir betrachten die Operatorgleichung (lineares Gl.-system, Integralgleichung etc.)

$$Ax = y, \quad x \in X, y \in Y.$$

Wir sagen x ist eine “Least-Squares Lösung”, falls

$$\inf\{\|Au - y\| : u \in X\} = \|Ax - y\|.$$

ist. Da $\|Au - y\|^2 = \|Au - Qy\|^2 + \|y - Qy\|^2$ gilt, wobei Q der orthogonale Projector von Y auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$ ist, ist es klar, dass eine Least-Squares Lösung genau dann existiert, falls $y \in \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(A)^\perp$ gilt, wobei $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(A)^\perp$ eine dichte Menge in Y ist. Für solch ein y besitzt die Menge aller Least-Squares Lösungen ein eindeutiges Element minimaler Norm, bezeichnet mit $A^\dagger y$.

Die Pseudoinverse $A^\dagger y$ ist die Minimum-Norm-Lösung (d.h. die einzige Lösung in $\mathcal{N}(A)^\perp$) der *Normalgleichung*

$$A^* Ax = A^* y$$

(die man durch Nullsetzung der ersten Variation $\|Ax - y\|^2$ erhält).

$\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sei eine positive, strikt monoton fallende Nullfolge, d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} \tau_j = 0$.
Wir betrachten Operatoren $E_{\tau_j} : X \rightarrow X$ mit

$$E_{\tau_j} x \rightarrow x$$

Zusatzforderung:

$$E_{\tau_j} x(w) = \langle e_{\tau_j}(w, \cdot), x \rangle_X$$

z. B. $e_{\tau_j}(\cdot, \cdot)$ kann als **Gauss-Kern** gewählt werden. Es folgt

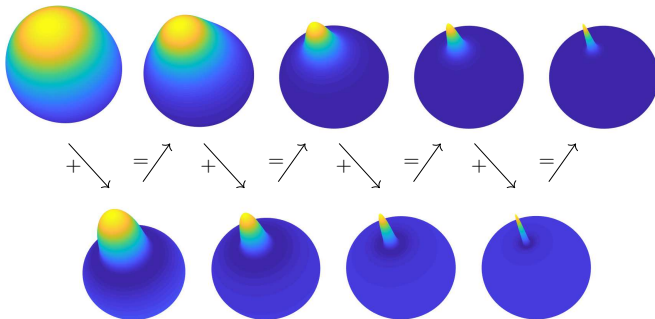
$$\underbrace{A E_{\tau_j}(x)(w)}_{= A_{\tau_j}} = \langle A e_{\tau_j}(w, \cdot), x \rangle_X \rightarrow A x = y, \quad x \in X, \quad \tau_j \rightarrow 0 \quad (1)$$

Ziel: Anstelle von $x^\dagger = A^\dagger y$ wir suchen nach einer Näherung $E_{\tau_j} x^\dagger$.

$\{A_{\tau_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ wird Mollifier-Skalierungsfamilie genannt. $\{A_{\tau_j}^{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit $A_{\tau_j}^{j+1} = A_{\tau_{j+1}} - A_{\tau_j}$ wird Mollifier-Waveletfamilie genannt.

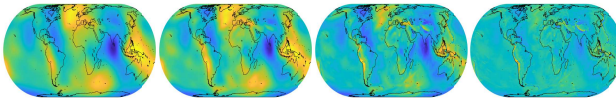
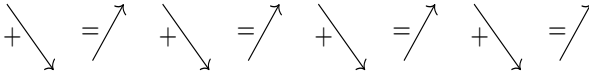
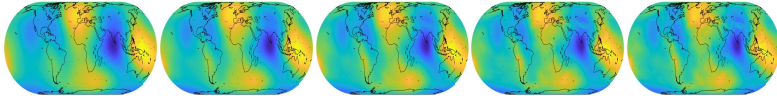
$$\begin{array}{ccccccc} A_{\tau_{j_0}}^{j_0+1} & & & & A_{\tau_{j_0+1}}^{j_0+2} & & \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ A_{\tau_{j_0}} & \longrightarrow & + & \longrightarrow & A_{\tau_{j_0+1}} & \longrightarrow & + \longrightarrow A_{\tau_{j_0+2}} \dots \end{array}$$

Mollifier Skalierungsfamilie



Mollifier Waveletfamilie

Mollifier Skalierungsfamilie

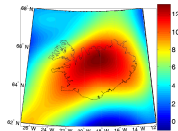


Mollifier Waveletfamilie

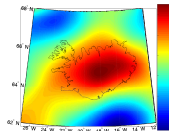
Global Earth's Gravitational Model (EGM): EGM zeigt einerseits, dass das Gravitationspotential ziemlich glatt ist, andererseits wird EGM scharf dekorreliert durch die Waveletfilterung, so dass die Detailstruktur für größere Skalen sich auf geophysikalisch relevante Zonen (e.g., Subduktionszonen, Gebiete der Orogenese, etc.) konzentriert.

W. Freeden: Decorrelative Mollifier Gravimetry - Basics, Concepts, Examples, and Perspectives. Geosystems Mathematics, Birkhäuser, Cham, 2021.

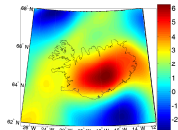
Disturbing potential in $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$:



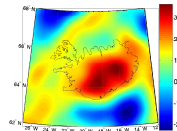
scale 10 (wavelet)



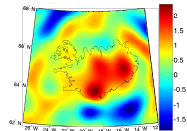
scale 11 (wavelet)



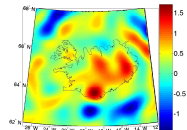
scale 12 (wavelet)



scale 13 (wavelet)



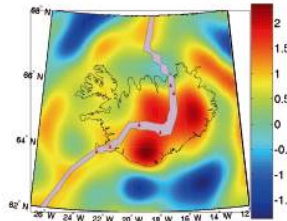
scale 14 (wavelet)



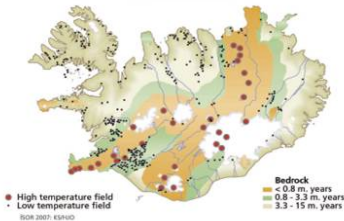
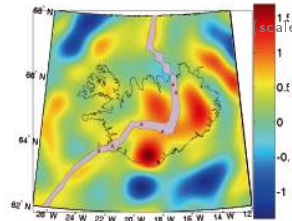
scale 15 (wavelet)

Disturbing potential in $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$:

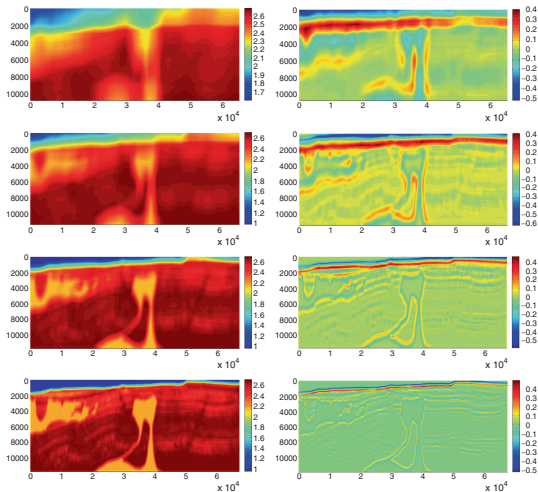
(scale 14)



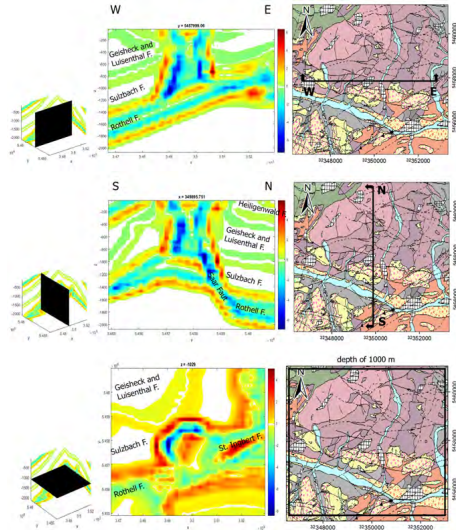
(scale 15)



W. Freeden: Decorrelative Mollifier Gravimetry - Basics, Concepts, Examples, and Perspectives. Geosystems Mathematics, Birkhäuser, Cham, 2021.



Numerical calculations by Geomathematics Group, University of Kaiserslautern.



Numerical calculations PtJ Research Projects SPE (2016-2019), SYSEXPL (2020-2023).

W. Freeden, H. Nutz: Exploratory potential methods in geothermal power generation - A survey on innovative gravimetry and magnetometry. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing, Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland, Cham, 2024.

Herzlichen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!