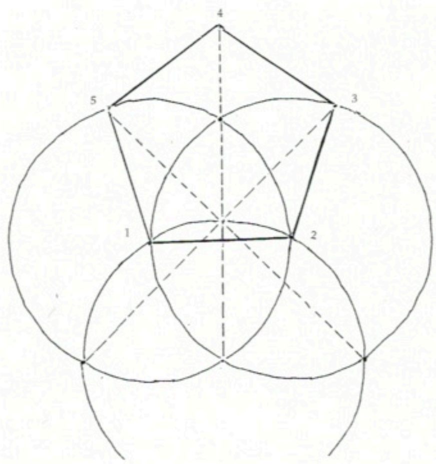
Band 38
Dortmund 2009

FÖRDERKREIS VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.

KONSTRUIEREN MIT LINEAL UND ZIRKEL



Helmut Minow

Nachgebaute Messgeräte

Voraussetzungen • Bilder • Beschreibungen

Konrad Peters

SCHRIFTENREIHE DES FÖRDERKREISES
VERMESSUNGSTECHNISCHES MUSEUM E.V.

Doppelband 38

Helmut Minow

Mit Lineal und Zirkel

Zeichnerische Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Konrad Peters

Nachgebaute Messgeräte

Voraussetzungen • Bilder • Beschreibungen

Dortmund 2009

Abbildung auf der Titelseite oben von Helmut Minow:
Konstruktion eines Fünfecks mit Lineal und Zirkel

Abbildung auf der Titelseite unten:
Aus: Conrat von Ulm "Geodaisia", Straßburg 1580

Herausgegeben vom
Förderkreis Vermessungstechnisches Museum e.V.
Postfach 10 12 33, D-44012 Dortmund

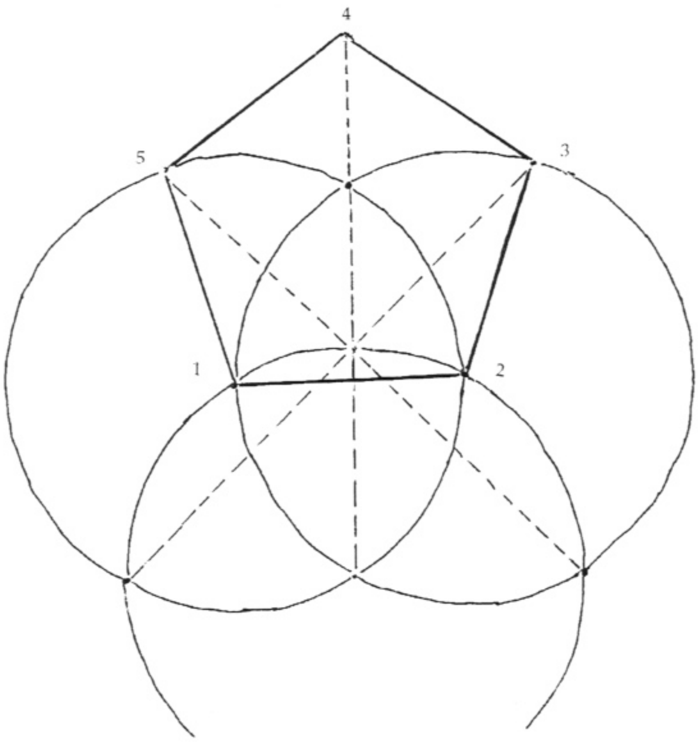
ISBN

Anschriften der Verfasser:
Dipl.-Ing. Helmut Minow, Kelchstraße 11, D-44265 Dortmund
Dipl.-Ing. Konrad Peters, Wiegandweg 63, D-48167 Münster

Helmut Minow

Mit Lineal und Zirkel

Zeichnerische Konstruktion regelmäßiger Vielecke



INHALT

• Einleitung

Beim Abstecken von Bauvorhaben oder bei der Vermessung vorhandener Bauwerke hat es die Bauvermessung gelegentlich mit regelmäßigen Vielecken zu tun, vielleicht mit dem Fünfeck, dem Siebeneck oder dem Achteck.

Eingehende Studien belegen, dass einige aus der Antike überlieferte Verfahren noch in der mittelalterlichen Bauvermessung angewendet wurden. In alten Lehrbüchern sind die zeichnerischen Konstruktions-Methoden meist sehr ausführlich dargestellt und erläutert. Aber auch neuere Fachbücher beschäftigen sich mit den Methoden der Kreisteilung.

Die folgenden Ausführungen können als Anregung zum zeichnerischen Konstruieren, vielleicht auch als geometrische Spielerei verstanden werden. Es sei dem Leser überlassen, sich mit dem jeweiligen mathematischen Problem zu beschäftigen.

• Regelmäßiges Sechseck

Die am einfachsten zu zeichnende Kreisteilung war bereits allgemein in den alten Kulturen bekannt: Trägt man auf dem Umfang des Kreises mit dem Radius r diesen Radius sechsmal hintereinander ab, so erhält man die Eckpunkte für das regelmäßige Sechseck. Verbindet man drei nicht benachbarte Ecken miteinander, so ergibt sich ein regelmäßiges Dreieck ($s_3 = r\sqrt{3}$) (Abb. 1).

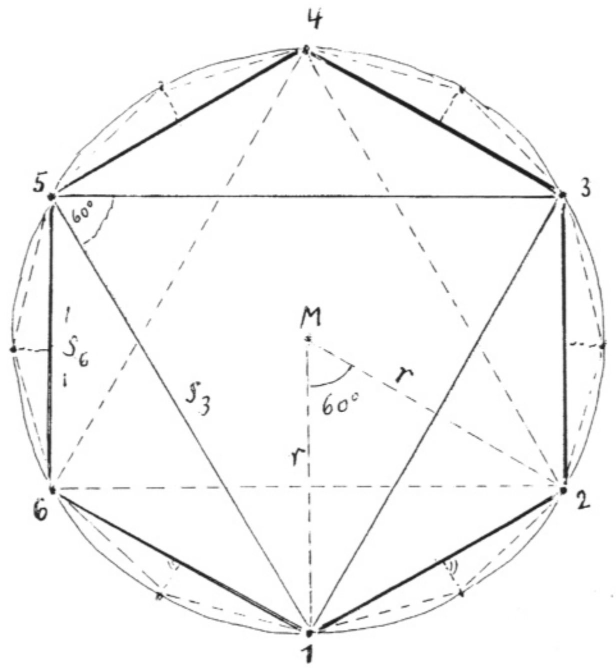


Abb. 1
Sechseck und Dreieck

- **Regelmäßiges Viereck**

Das regelmäßige Viereck ist das Quadrat. Seine Ecken ergeben sich als Schnittpunkte zweier zueinander senkrecht stehender Durchmesser mit dem Kreis (Abb. 2).

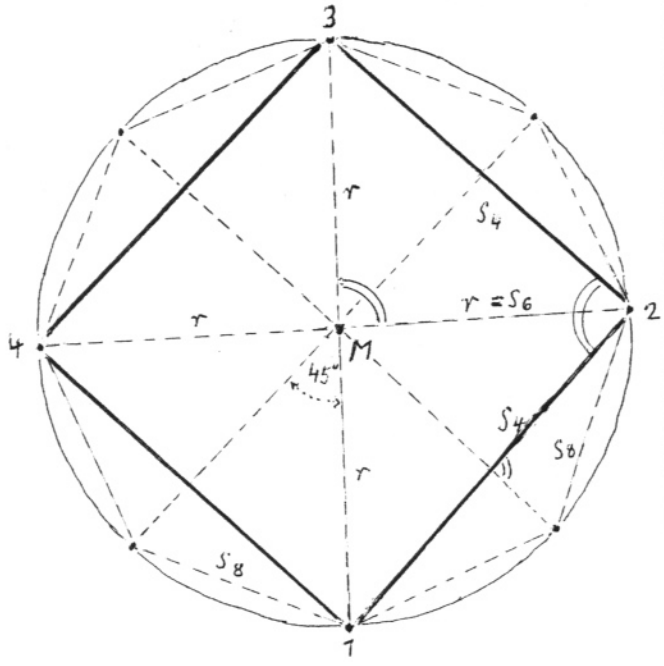


Abb. 2
Viereck (Quadrat)

Durch Seitenhalbierung lässt sich das regelmäßige Achteck sowie das 16-Eck ableiten.

Auf der Baustelle kann das Quadrat mit Hilfe der " Zwölfknotenschnur" abgesteckt werden [5].

- **Regelmäßiges Fünfeck (Pentagon)**

Für das Fünfeck beschreibt Roriczer eine bequeme Näherungskonstruktion (Abb. 3); er kommt dabei mit einer festen Zirkelöffnung (s_5) aus. Sein Text [6] beginnt: "Wer ein Fünfeck zeichnen will mit unverrückbarem Zirkel", der schlage Kreise um 1 und 2 mit der Seite des zu zeichnenden Fünfecks (das ist die Strecke 1-2).

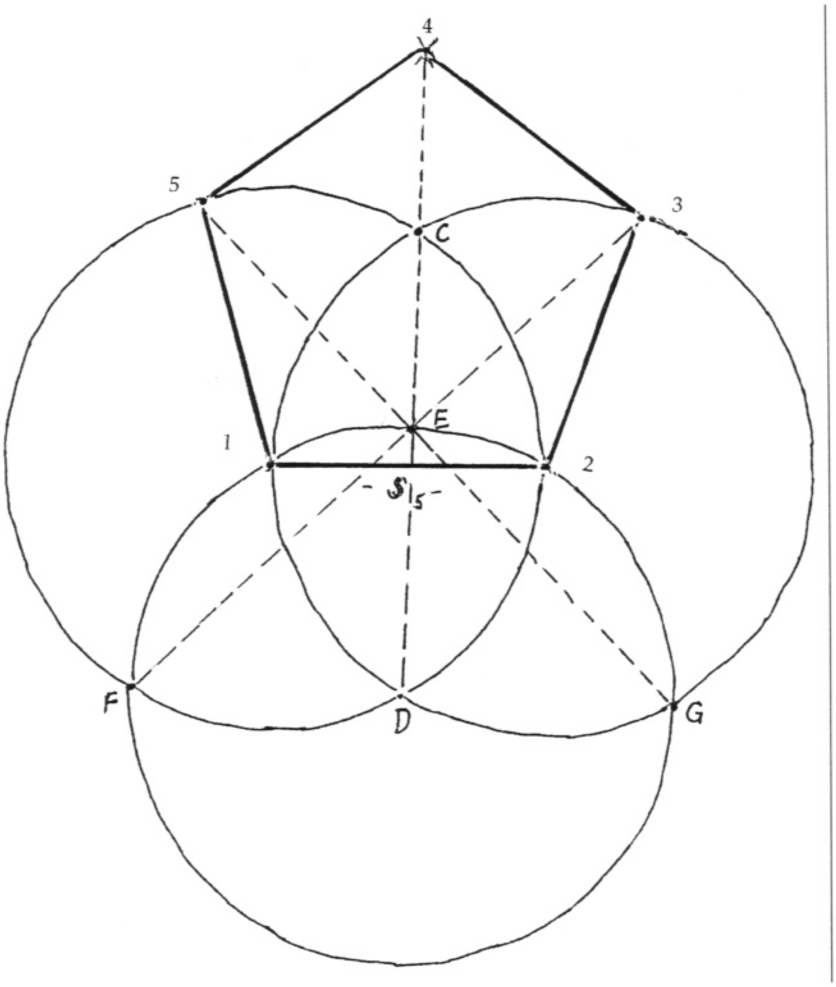


Abb. 3
Regelmäßiges Fünfeck - Näherungskonstruktion nach [6]

Die Schnittpunkte C und D verbinde man durch eine Gerade. Mit dem Kreis ($r = s_5$) um D, der durch die Punkte 1, 2 und E geht, ergeben sich die Schnittpunkte F und G.
Die Geraden FE und GE schneiden die Kreise in 3 und 5. Indem man mit s_5 Kreise um 3 und 5 schlägt, findet man den Punkt 4. 1, 2, 3, 4 und 5 sind die Eckpunkte des Pentagons.

Matthäus Roriczer war seit 1462 Baumeister in Nürnberg, Esslingen und Eichstädt, 1480 Dombaumeister in Regensburg, er starb dort um 1493.

In der arabischen, mathematischen Literatur ist es Abu-l-Wafa (940 - 998), der in seinem "Buch der geometrischen Konstruktionen" u. a. die Konstruktion regelmäßiger Vielecke, darunter auch die Zeichnung des regelmäßigen Fünfecks, behandelt.

- **Regelmäßiges Zehneck**

Zu seiner Konstruktion (Abb. 4) wird auf dem Durchmesser AB des Kreises um M mit dem Radius r der zu AB senkrechte Radius MD gezeichnet. Der Radius AM wird im Punkt H halbiert. Für das rechtwinklige Dreieck HMD folgt nach dem Satz des Pythagoras, dass die Strecke $HD = r/2 \cdot \sqrt{5}$ ist. Der Kreisbogen mit HD um H schneidet den Radius MB in E; $ME = s_{10}$.

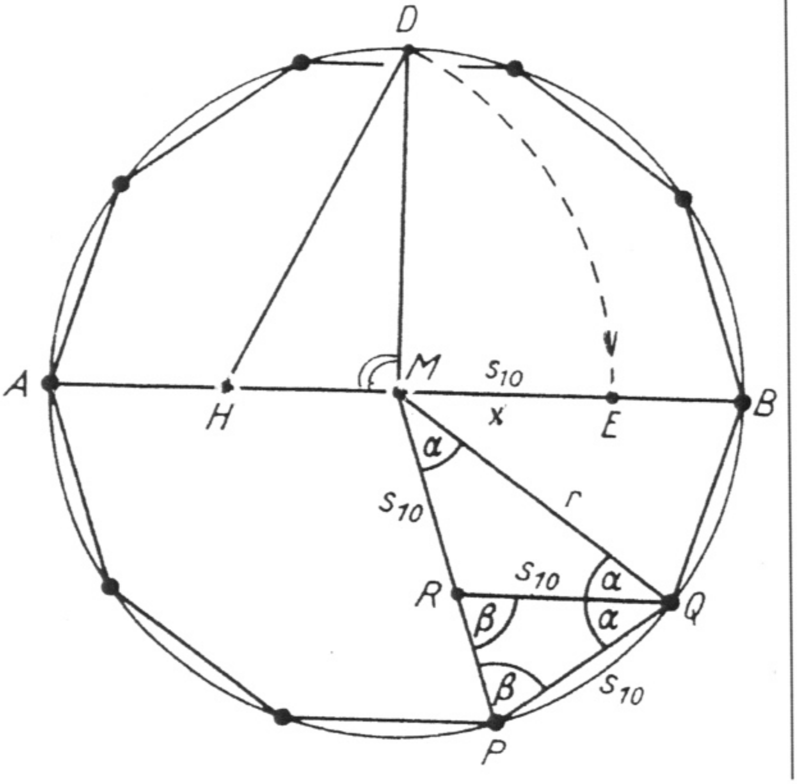


Abb. 4
Regelmäßiges Zehneck

Die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist der größere Abschnitt des nach dem Goldenen Schnitt geteilten Umkreisradius BM.
Mit dem regelmäßigen Zehneck ist auch das regelmäßige Fünfeck gewonnen.

$\alpha = 36°$, $\beta = 72°$, $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$, $\sqrt{5} = 2{,}2360679...$

- **Goldener Schnitt**

Der Goldene Schnitt (sectio / proportio divina) ist in der Geometrie ein berühmtes Problem. Auch als "Stetige Teilung" bekannt, war der Goldene Schnitt in der Ästhetik schon seit dem Altertum von besonderer Bedeutung; er wurde aber in der Kunst seltener angewendet als allgemein angenommen.

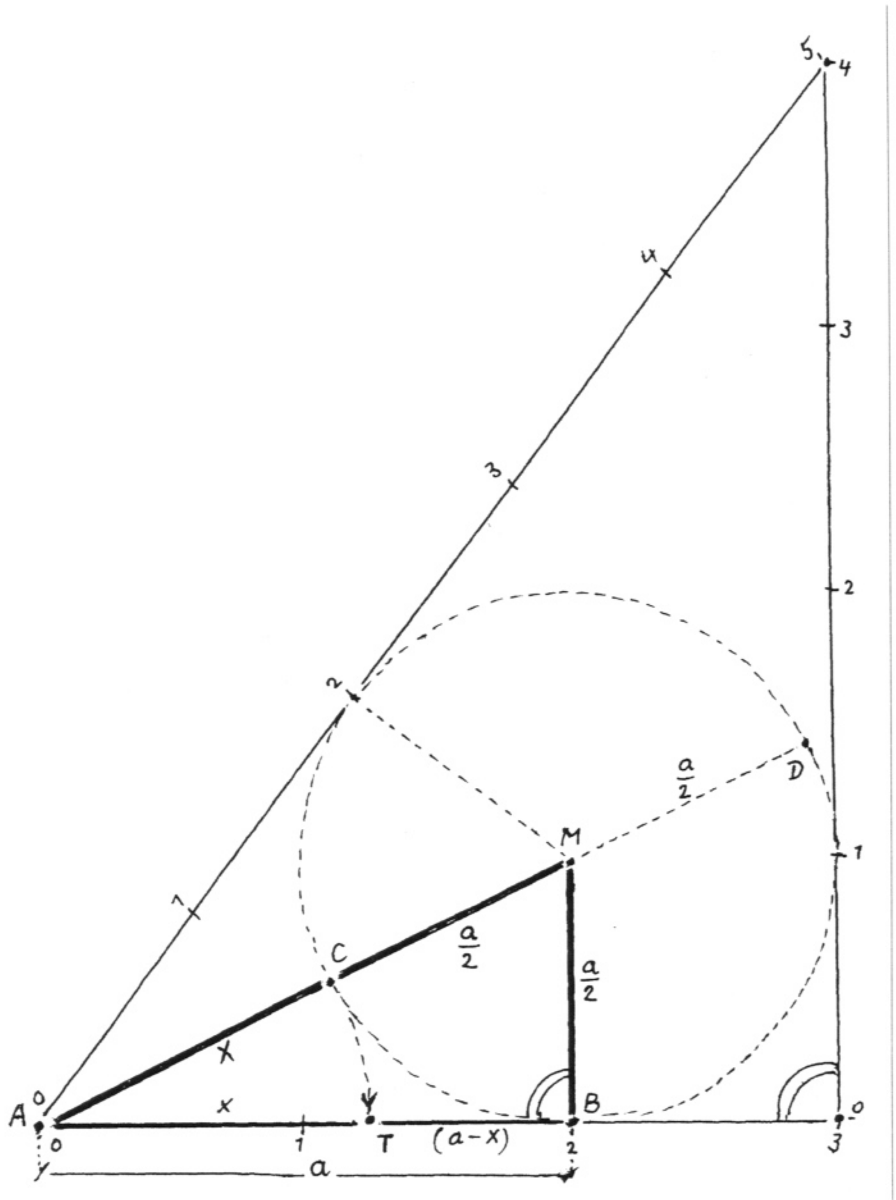


Abb. 5
Goldener Schnitt

Abb. 5: Eine Strecke (a) ist stetig geteilt, wenn sich die ganze Strecke ("Summa") zum größeren Abschnitt ("Major" = x) verhält wie dieser zum kleineren Abschnitt "minor" = (a - x).
Also:
"minor" verhält sich zu "Major" wie "Major" zu "Summa",

m : M = M: (m+M) oder

AB : AT = AT : BT, bzw.

$$a : x = x : (a-x)$$

$$x = \sqrt{a \cdot (a - x)}$$

$$= a/2 \, (\sqrt{5} - 1)$$

$$= 0{,}618... \cdot a$$

Trägt man den kleineren Abschnitt einer nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke auf dem größeren Abschnitt auf, so wird letzterer wieder nach dem Goldenen Schnitt geteilt; daher auch der Name "Stetige Teilung".

Als "Faustregel" gelten die Verhältnisse
2 : 3 = 3 : 5 = 5 : 8 = 8 : 13 = 13 : 21 usw.

Das Verhältnis (a-x) : x beim Goldenen Schnitt wird mit φ (phi) bezeichnet.
Wenn man die kleinere Teilstrecke (a-x) = 1 setzt,
so ergibt sich für die Teilstrecke x die Länge φ;
der Zahlenwert dieses irrationalen Ausdrucks beträgt 1,61803398...

Setzt man für die Teilstrecke x = 1 , so ergibt sich für die
Länge der Teilstrecke (a - x) der Wert 0,6l803398... = φ - 1.

Hier zeigt sich die sehr merkwürdige Eigenschaft der Zahl φ. Sie ist nämlich die einzige Zahl, die nach Verminderung um 1 ihren Reziprokwert ergibt.

Dazu treten noch weitere Merkwürdigkeiten auf

$\varphi - 1 = 1/\varphi \quad = 0{,}618...$
$\varphi \quad = 1{,}618...$
$\varphi^2 \quad = 2{,}618...$
$\varphi \cdot \sqrt{5} \quad = 3{,}618...$
$2\varphi \quad = 3{,}263... = 1 + \sqrt{5}$.

In Abb. 5 hat der Inkreis im rechtwinkligen Dreieck " 3 : 4 : 5 " den Radius a/2. Er liefert mit dem Verhältnis (a-x) : x den Goldenen Schnitt, welcher auch den regelmäßigen Fünfstern (Pentagramm oder "Drudenfuß") beherrscht.

Das Auftreten des Goldenen Schnitts im Pentagramm (Abb. 6) war schon den Pythagoreern sehr wohl bekannt.

Das Pentagramm mit den erstaunlichen Beziehungen seiner Teilung untereinander hatte die Pythagoreer so fasziniert, dass sie das Pentagramm als ihr Emblem verwendeten.

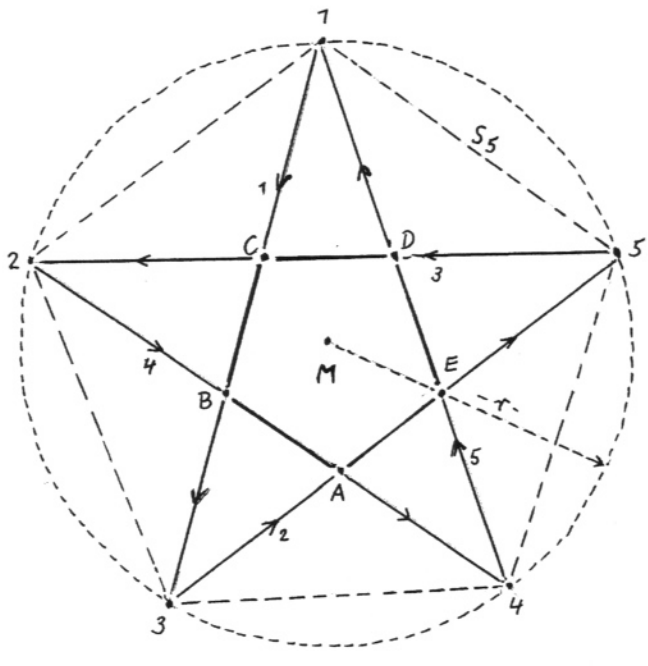


Abb.. 6
Pentagramm (Drudenfuß)

- **Dürers Methode**

In einer seiner Schriften [2] hatte Albrecht Dürer einige regelmäßige Vielecke beschrieben. Danach, wird das Fünfeck so konstruiert (Abb. 7 und 8):

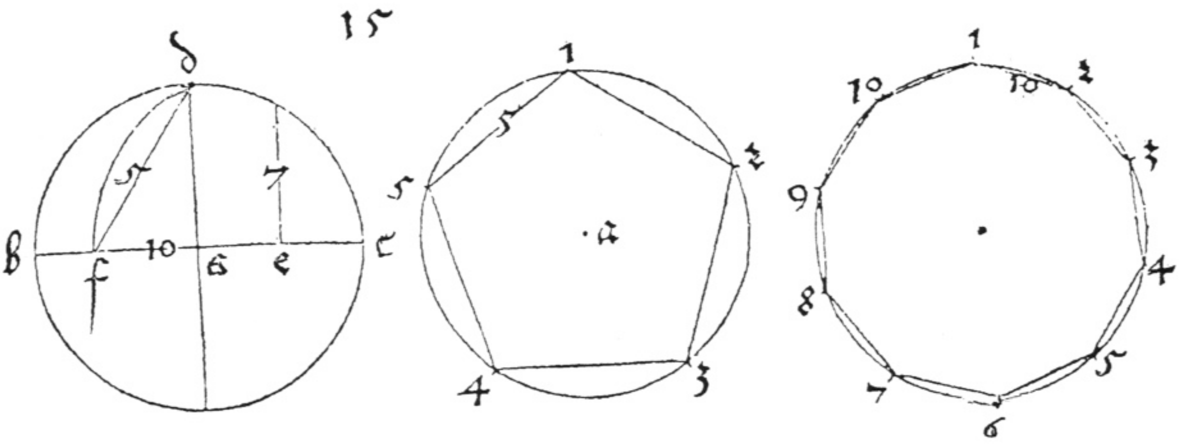


Abb. 7
Dürers Methode: Fünfeck und Zehneck [2]

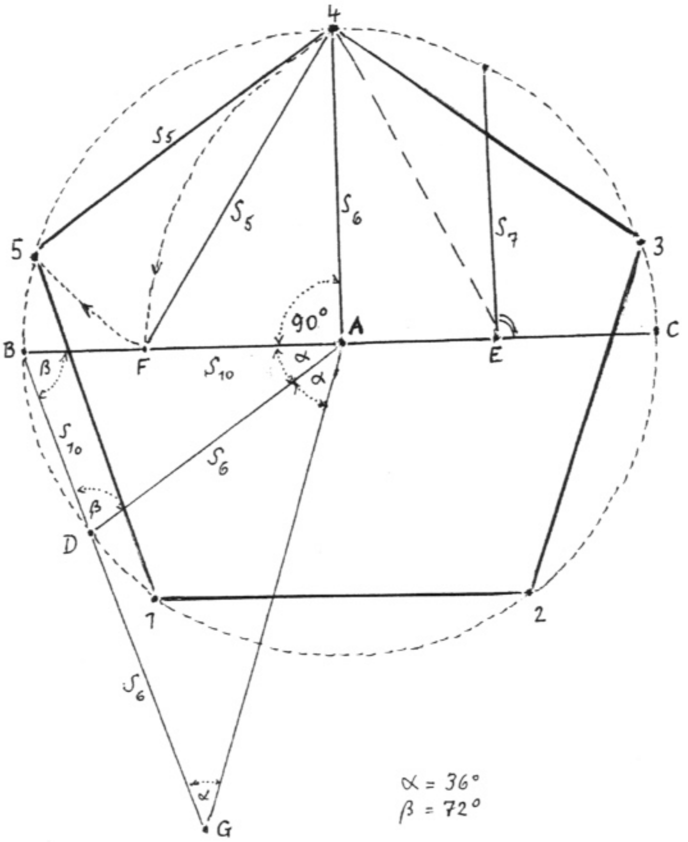


Abb. 8
Konstruktion des Fünfecks und des Zehnecks

Man zeichne einen Kreis, halbiere den Radius AC in E. (AE = EC), schlage mit der Strecke E-4 um E den Kreis, der BA in F trifft. 4-F ist die Seite (s_5) des dem Kreis einbeschriebenen Fünfecks, und AF ist die Seite des Zehnecks.

$s_{10} = 1/2\,(\sqrt{5}\ - 1);$

$(s_6)^2\ +\ (s_{10})^2\ =\ (s_5)^2\ ;$

$s_{10}\ :\ s_6\ =\ s_6\ :\ (s_6\ +\ s_{10}).$

Das steht übrigens schon bei Ptolemaios (Almageest I, 16) und bei Euklid (Elemente IV, 11).

Außerdem bildet die senkrechte Strecke über E näherungsweise die Seite (s_7) des Siebenecks, das nicht exakt zu konstruieren ist.

Eine andere Näherungs-Konstruktion (Abb. 9) beschreibt Roriczer [6].

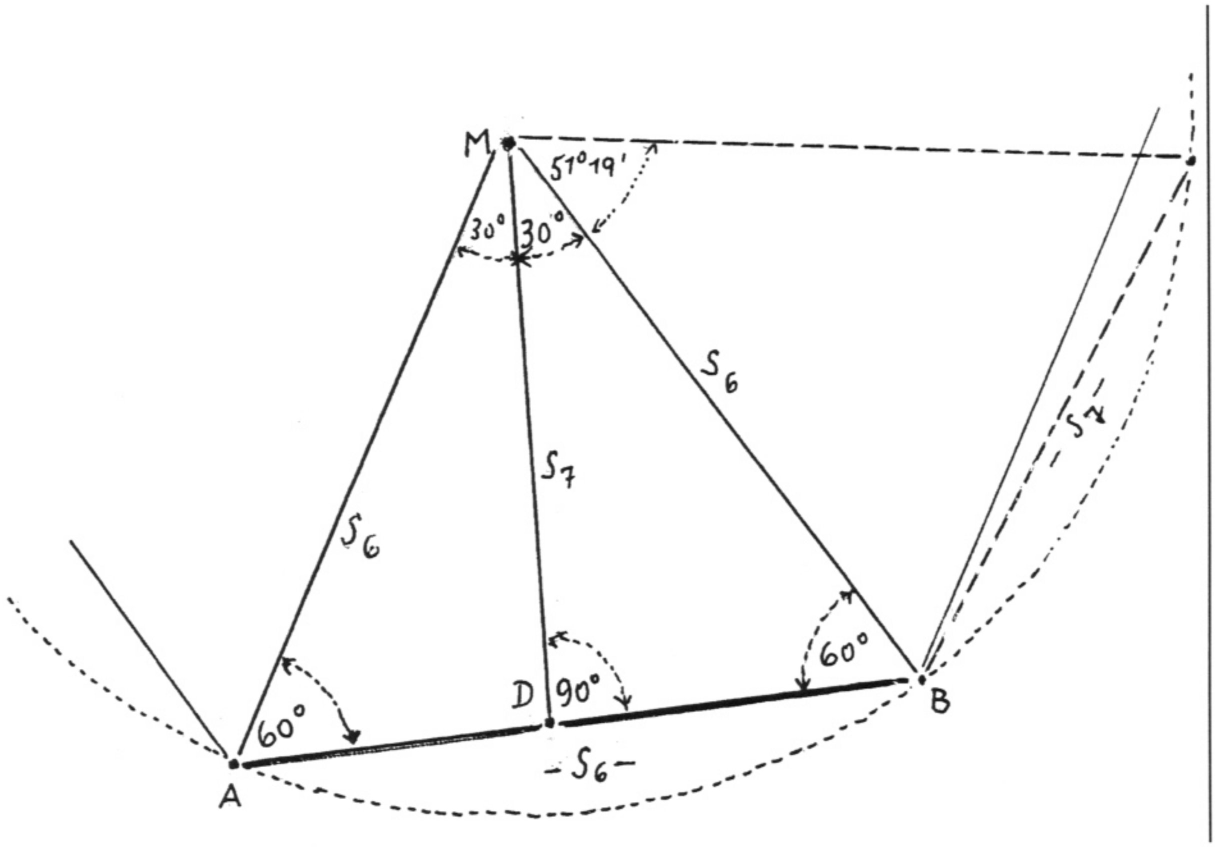


Abb. 9
Regelmäßiges Siebeneck - Näherungskonstruktion nach [6]

"Wer schnell ein Siebeneck zeichnen will", der zeichne einen Kreis mit M als Mittelpunkt und konstruiere zunächst das Sechseck. ABM ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Sehne AB (= s_6) wird halbiert, AD = BD. In dem gleichseitigen Dreieck ABM ist MD näherungsweise die Seite (s_7) des dem Kreis einbeschriebenen Siebenecks.

Dieses Konstruktions-Verfahren gab es bereits bei Heron aus Alexandria.

- **Regelmäßiges Achteck**

Ebenfalls bei Roriczer [6] findet man eine Methode zum Zeichnen des regelmäßigen Achtecks: Dazu schlägt man um die Ecken des Quadrats Q R S T Kreise mit der halben Diagonale als Radius, z.B. mit der Strecke S-M (= $a \cdot \sqrt{2}$, wobei a = Inkreisradius des Achtecks). Die Schnittpunkte mit den Quadratseiten ergeben das Achteck (Abb. 10).

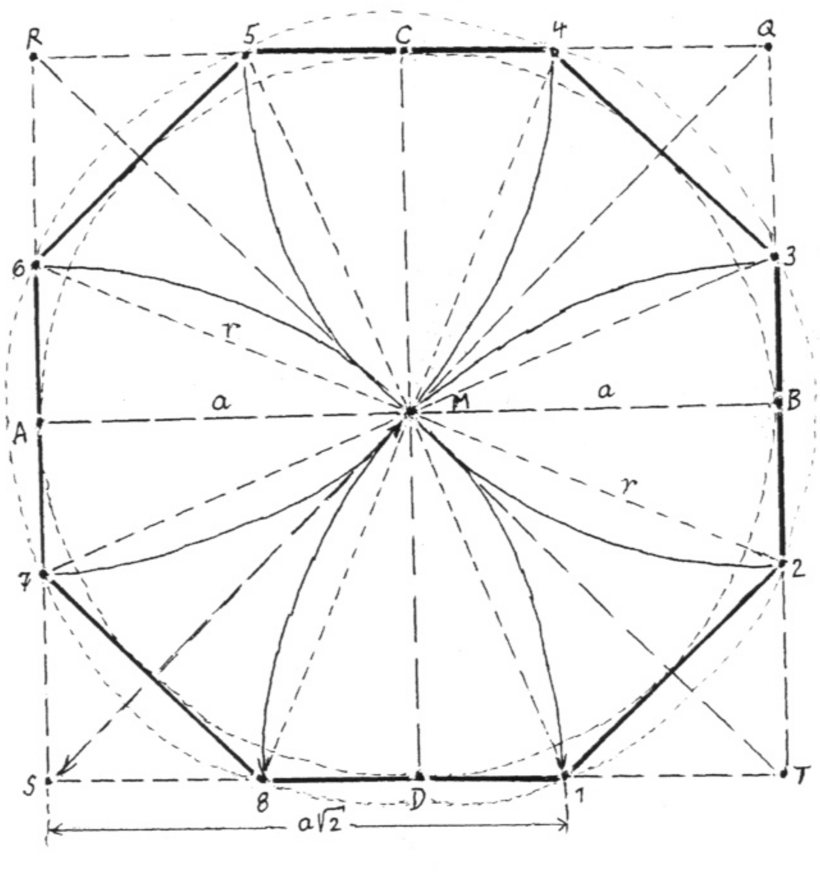


Abb. 10
Konstruktion des regelmäßigen Achtecks nach [6]

Diese Konstruktion findet man schon in Agrimensoren-Handschriften des 10. Jahrhunderts.

Auch direkt aus dem Quadrat kann (ganz einfach) das Achteck gewonnen werden (Abb. 2).
Es hat acht gleiche Seiten ($s_8 = r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$). r ist der Umkreis-Radius des Achtecks.
Der Zentriwinkel für s_8 beträgt 45°.

Aus dem Achteck lässt sich der Achtstern bilden (Abb. 11).

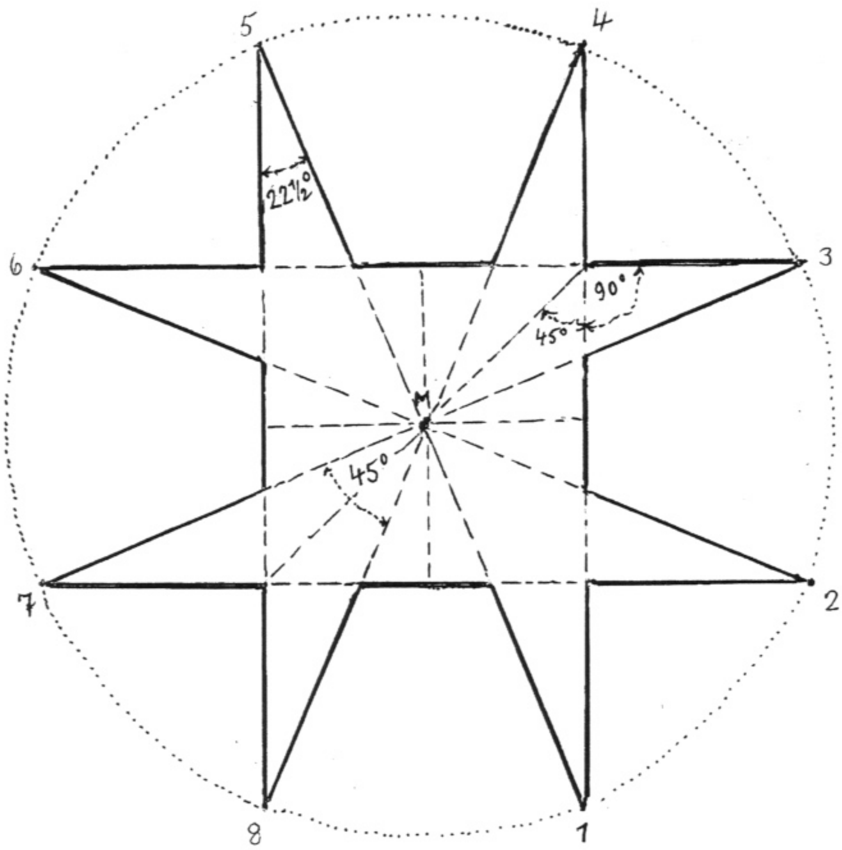


Abb. 11
Regelmäßiger Achtstern

- **Regelmäßiges 17-Eck**

Die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke (Dreieck, Viereck, Fünfeck und die davon ableitbaren Folgen) sowie des regelmäßigen 15-Ecks war bereits den griechischen Mathematikern des Altertums bekannt.

Erst im Jahre 1796 gelang dem 19jährigen Carl Friedrich Gauß der Nachweis, dass auch das regelmäßige 17-Eck mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist; Gauß schreibt:

"Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Fünfeck, Fünfzehneck und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construieren lassen. So weit war man schon zu Euklids Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern. - Desto mehr dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden. - C. F. Gauß, a. Braunschweig. Stud. der Mathematik zu Göttingen."

Bei der von Gauß erwähnten Theorie geht es um die Lösung der Kreisteilungsgleichung $x^n - 1 = 0$. Kurzum: Wenn der Exponent n eine besondere Primzahl ist, kann die Kreisteilung mit Lineal und Zirkel vorgenommen werden [4].

Mit seiner Entdeckung brachte Gauß die sich über zwei Jahrtausende erstreckenden Bemühungen zum Abschluss. Zur Erinnerung an diese große wissenschaftliche Leistung sollte auf seinem Grabstein ein regelmäßiges 17-Eck angebracht werden.

- **Der Proportionalzirkel als Hilfsmittel**

Die Aufteilung eines Kreises in beliebige gleichgroße Abschnitte erfordert oftmals viel Mühe und Geduld.

Da hilft ein Universalinstrument, der Proportionalzirkel. Trotz seiner erstaunlichen Einfachheit bietet das Instrument viele Anwendungsmöglichkeiten; so erleichtert es auch das Konstruieren regelmäßiger Vielecke.

Der Proportionalzirkel enthält auf den beiden Schenkeln dafür die gleiche Einteilung (Abb. 12 und 13).

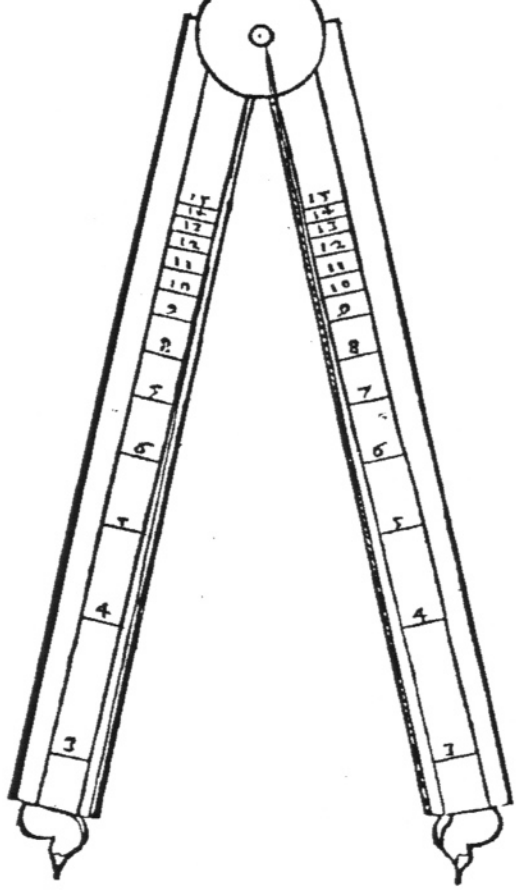


Abb. 12
Proportionalzirkel mit der "linea polygonorum"

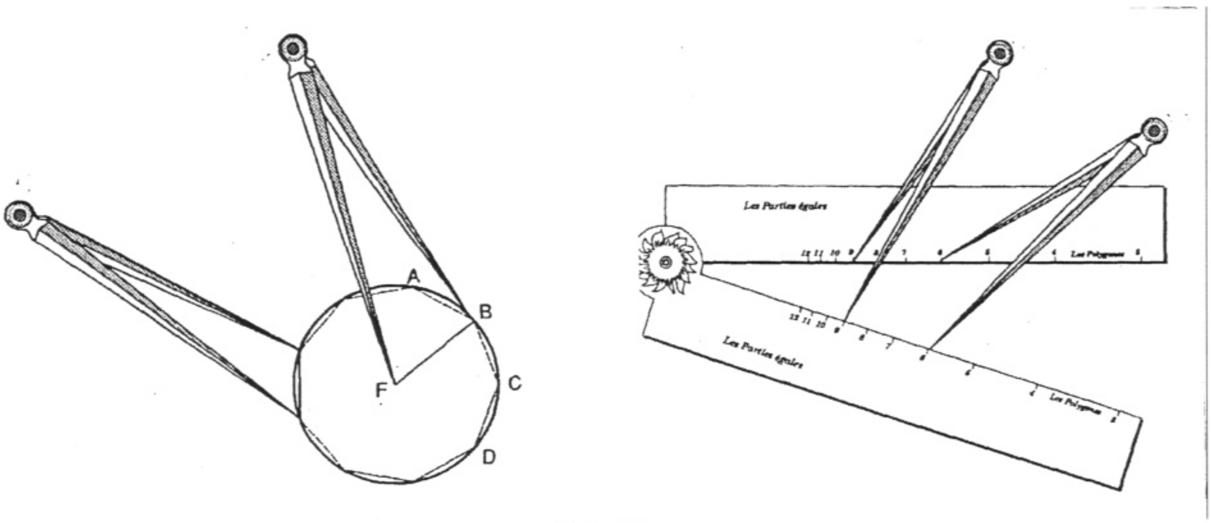


Abb. 13

Beispiel: Teilung des Kreisumfangs in neun gleiche Abschnitte mit dem Proportionalzirkel [4]

Die Teilung der beiden Linien entspricht der Funktion $f(x) = d \cdot \sin(180°/n)$,
wobei $n = 3, 4, 5$ ... und d = Kreisdurchmesser.

Damit können die wichtigsten Vielecke (n-Ecke) schnell gezeichnet werden.

- **Weitere graphische Lösungen**

Methoden zur Teilung des Kreises sind auch in neueren Vermessungshandbüchern eingehend beschrieben [1]. Zum Konstruieren aller wichtigen Vielecke werden interessante Lösungen angeboten (Abb. 14).

Für ein beliebiges regelmäßiges Vieleck sei hier die Konstruktion des Fünfecks und des Zehnecks beispielhaft dargestellt (Bild 14 a).

Man bildet mit dem Durchmesser AB die gleichseitigen Dreiecke ABC und ABC', teilt den Durchmesser AB in fünf gleiche Abschnitte (0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5). Dann zeichnet man von C durch "2" eine Linie, die den Umkreis schneidet.

Den Schnittpunkt verbindet man mit A und erhält die Seite des regelmäßigen Fünfecks (s_5).

Ferner: Die Linie durch "1" ergibt mit dem Umkreis einen Schnittpunkt, den man mit A verbindet; diese Strecke ist die Seite des regelmäßigen Zehhecks (s_{10}).

Die anderen Eckpunkte dieser beiden Vielecke werden in der gleichen Weise gebildet.

Für alle anderen regelmäßigen Vielecke wird das graphische Verfahren entsprechend angewendet [1]. Vgl. Abb. 14.

PRACTICAL GEOMETRY

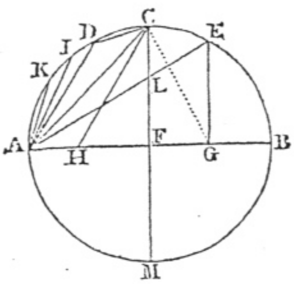
PROBLEM V.

All other regular polygons may be inscribed in a circle, for each of which a particular rule may be given; but I choose rather to give one general scheme for inscribing all the usual regular polygons in a circle.

In the circle AB CM, draw two diameters, crossing each other at right angles; then,

For the equilateral triangle.

Take FC in the compasses, and set it from A to D, and from D to E; draw AE, and it will be a side of the inscribed equilateral triangle.



For the square.

Draw AC, and it will be a side of the square inscribed.

For the pentagon.

Bisect FB in G, draw CG; make GH=GC, draw CH for a side of the pentagon.

For the hexagon.

The radius FC set off from A to D, will be a side of the hexagon.

For the heptagon.

The line EG is a side of the heptagon.

For the octagon.

Bisect the arc AC in I, and draw AI for a side of the octagon.

For the nonagon.

Divide the arc ADE into three equal parts, at K draw AK, and it will be a side of the nonagon.

For the decagon.

The part of the diameter intercepted between H and F, will be a side of the decagon.

For the undecagon.

The part of the radius between F and L, will be a side of the undecagon.

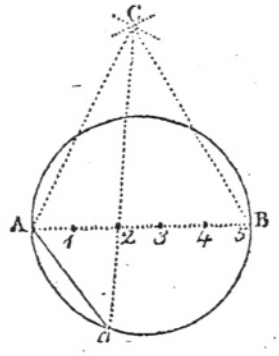
For the duodecagon.

The line from C to D will be a side of the duodecagon.

Another method is as follows:

Draw the diameter, AB, of the circle; and therewith construct an equilateral triangle, ABC.

Divide the diameter into as many equal parts as the proposed polygon has sides.



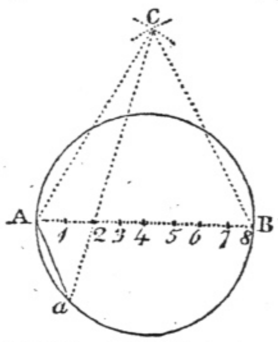
From C, the apex of the equilateral triangle, draw a line through the *second division* in the diameter, until it touches the circle below, as at a; from whence, if a line be drawn to A (where the numbering began), it will give the length of a side of the required polygon.

1. EXAMPLE.

Required the side of a *pentagon*, by the above figure.

Divide the diameter into five parts. Draw lines from C, through 2 to a, and from thence to A; so will Aa be the side of the pentagon.

2. Required the side of an *octagon*?



The diameter being divided into 8 parts, draw the line C2, as before directed, to touch the circumference at a. Draw Aa, and it will be the length of a side of the octagon required.

Abb. 14
Regelmäßige Vielecke in der praktischen Vermessung, aus [1]

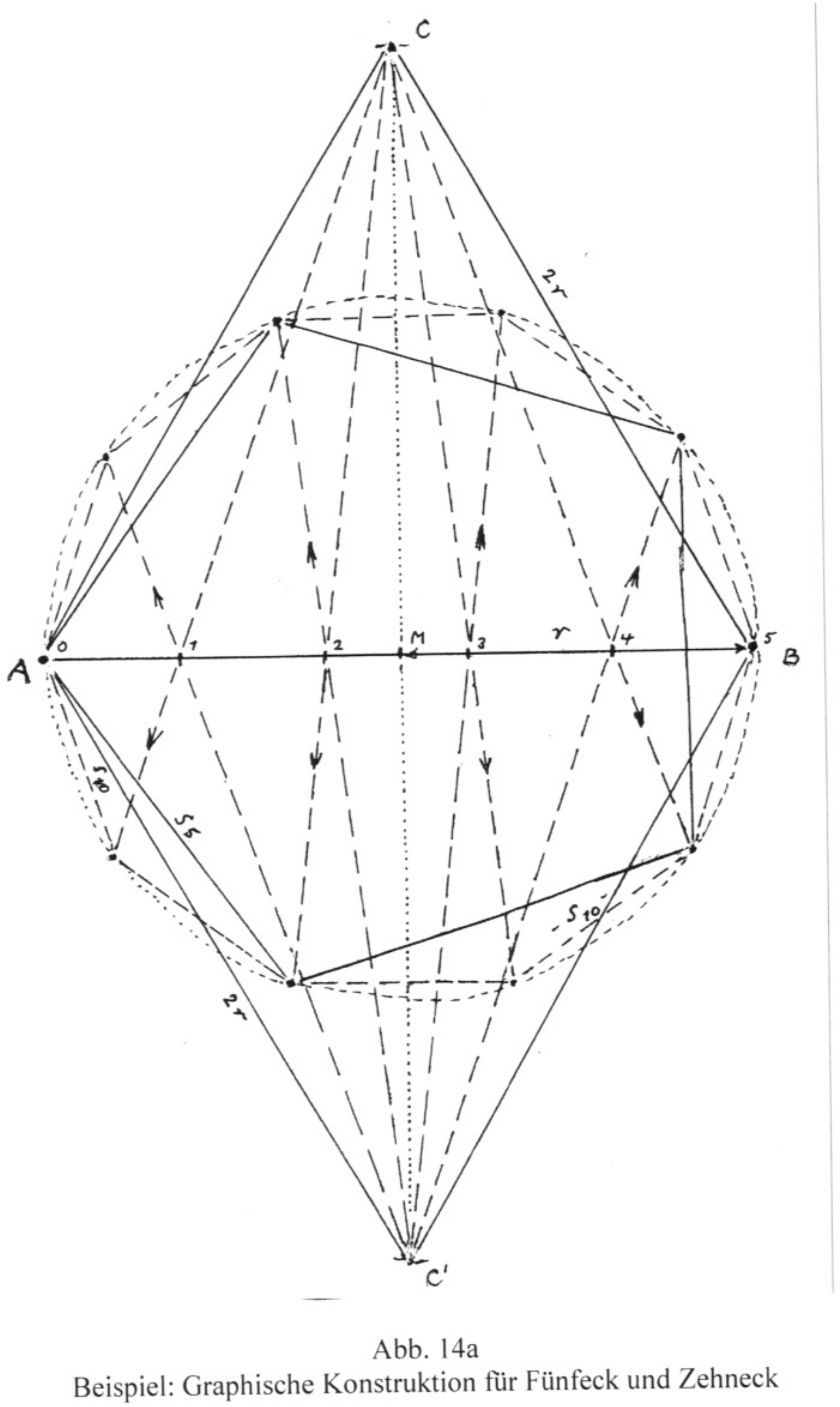


Abb. 14a
Beispiel: Graphische Konstruktion für Fünfeck und Zehneck

• **Literatur**

[1] Crocker, A.:
The Elements of Land Surveying
London 1806, 1814

[2] Dürer, Albrecht (1471 - 1528):
Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt...,
Nürnberg 1525, 1567, Zürich 1966

[3] Gauß, Carl Friedrich (1777 - 1855):
Wissenschaftliche Veröffentlichung 1802

[4] Mallet, A. M.:
La geometrie pratique. Paris 1702

[5] Minow, Helmut:
Vermessungen mit der Zwölfknotenschnur und andere Konstruktionen mit dem Meßseil,
Dortmund 1992

[6] Roriczer, Matthäus:
Die Geometria Deutsch,
Regensburg 1487, Nürnberg 1497, Wiesbaden 1965

Konrad Peters

Nachgebaute Messgeräte

Voraussetzungen • Bilder • Beschreibungen

Inhalt

Einführung

Die Geschichte der Bau- und Landvermessung lässt sich über 5000 Jahre zurückverfolgen. An der Entwicklung des Messens waren alle Kulturvölker beteiligt. Die Genauigkeit, mit der die antiken Monumentalbauten errichtet und die umfangreichen römischen Landaufteilungen (Limitationen) durchgeführt wurden, belegt, dass Landmesser und Baumeister hervorragende Arbeit geleistet haben.

Wie und mit welchen Geräten die durch Nachmessungen festgestellte Genauigkeit erreicht wurde, ist eine Frage, die der Forschung gestellt wird. Dies gilt besonders für die Messgeräte, von denen nur Fragmente bekannt sind. Das beim Bau der Geräte benutzte Holz hat den ´Zahn der Zeit´ nicht überstanden. Wenn man die alte Vermessung nachvollziehen und analysieren will, dann müssen die Geräte nachgebaut werden. Es gibt bisher noch keine *praxisbezogene* Gesamtuntersuchung zu den Messgeräten des Altertums. Die Veröffentlichungen enthalten fast nur Beschreibungen und Darstellungen von Einzelgeräten unter dem Aspekt eines bestimmten Fachgebiets. Es liegen auch keine Angaben über Funktion, Einsatz und Genauigkeit der Geräte vor [1]. Um diese Forschungslücke zu schließen, habe ich die Geräte nachgebaut und Untersuchungen dazu durchgeführt. Damit steht der Forschung nun eine Grundlage für vergleichende Untersuchungen zur Verfügung. Die nachgebauten Geräte konnten bisher in 18 Ausstellungen einer interessierten Öffentlichkeit gezeigt werden.

Mit dieser Arbeit komme ich dem Wunsch vieler Kollegen und Ausstellungsbesucher nach, die Nachbauten vorzustellen.

Geräte-Nachbau

Wichtig für den Nachbau funktionsfähiger Messgeräte war meine Tätigkeit in der Ingenieurvermessung; als Praktikant habe ich noch das ´einfache Messen´ gelernt.

Nützlich waren außerdem die Auswertung der archäologischen Funde und der schriftlichen Überlieferungen (Quellen) sowie die Anwendung der aus dem Altertum bekannten mathematischen Lehrsätze.

Die Geräte wurden mit einfachen Werkzeugen und Hilfsmitteln in Handarbeit nachgebaut. Als Baumaterial diente hauptsächlich Fichtenholz. Schon während der Nachbauarbeiten fanden erste Prüf- und Testversuche statt. So konnten Probleme und Besonderheiten erkannt und bei weiteren Arbeiten berücksichtigt werden. Dabei konnte man sich in die Gedankenwelt der alten Gerätebauer versetzen und auf Konstruktionsprobleme stoßen, mit denen auch sie sich auseinander zusetzen hatten.

Lotwaage, Setzwaage

Als ältestes Vermessungsgerät gilt das Lot. Mit Hilfe des Lots fertigten die ägyptischen Baumeister die ersten Messgeräte (Bild 1). Die Lotwaage diente zur Herstellung und Prüfung der Senkrechten.

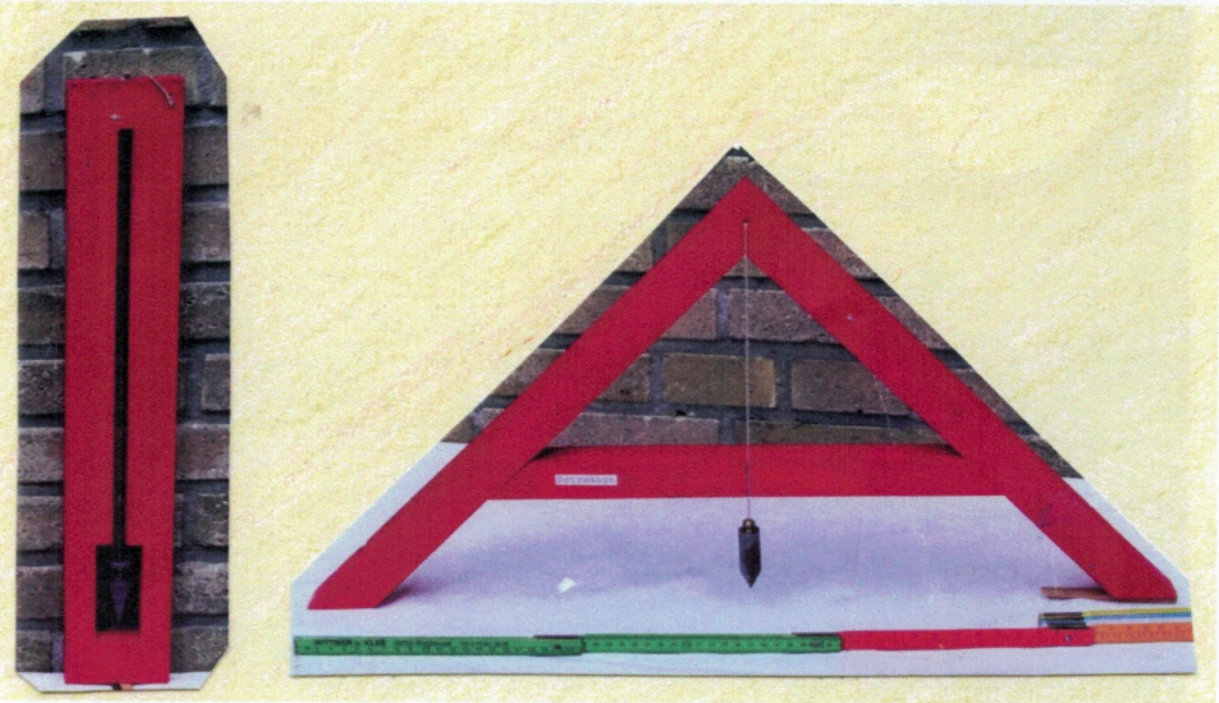


Bild 1: Lot- und Setzwaage

Die als Dreieck gebaute Setzwaage zeigte die Waagrechte an. Durch Aufsetzen der Setzwaage auf ein Richtscheit konnte der Höhenunterschied für eine längere Strecke bestimmt werden [2]. Beide Geräte erfüllten die Funktion der heutigen Wasserwaage. Die Setzwaage ist zudem ein bedeutendes Bauelement des Setzwaage-Nivelliers und bei der Staffelmessung. Dazu sind zahlreiche Funde und Darstellungen bekannt.

Die offene Wasserwaage (als Nivelliergerät)

Sie ist das einfachste Nivelliergerät des Altertums und von der Konstruktion her leicht zu bauen. Die Oberkante der Wasserrinne muss auf ihrer ganzen Länge parallel zur Zielachse verlaufen, damit das Gerät ´in der Waage´ steht. Das Anbringen von zwei Nägeln in der Wasserrinne (gleicher Abstand zur Zielachse) vereinfacht die Handhabung. Für den Messvorgang wird die Wasserwaage auf ein Stativ gesetzt (Bild 2).

Bild 2: Offene Wasserwaage

Messversuche lassen die komplizierte Handhabung und das Aufstellen der offenen Wasserwaage erkennen.

Dies dürfte der Hauptgrund gewesen sein, dass sie vom Setzwaage-Nivellier verdrängt wurde. Zu dem ´Gerät´ (offene Wasserwaage) gibt es aus dem Altertum nur wenige Literaturhinweise (z.B. bei Heron und Vitruv). Angaben und Zeichnungen über den Einsatz der Wasserwaage finden sich erst im Schrifttum der Renaissance.

Das Setzwaage-Nivellier

Das Setzwaage-Nivellier besteht aus Setzwaage, Richtscheit und Stativ. Von dem Gerät gibt es weder einen archäologischen Fund noch eine ausführliche Beschreibung. Es wird jedoch von Heron, Vitruv und einigen anderen Autoren erwähnt. Das Gerät wurde wohl deshalb nie ausführlich beschrieben, weil es wegen der einfachen Konstruktion von jedem Baumeister leicht herzustellen ist und - im Unterschied zu den Sonderkonstruktionen von Heron (Kanalwaage) und Vitruv (Chorobat) - das Gebrauchsgerät der Antike war. Erst in der Renaissance ist das Setzwaage-Nivellier Bestandteil der Fachliteratur [2].

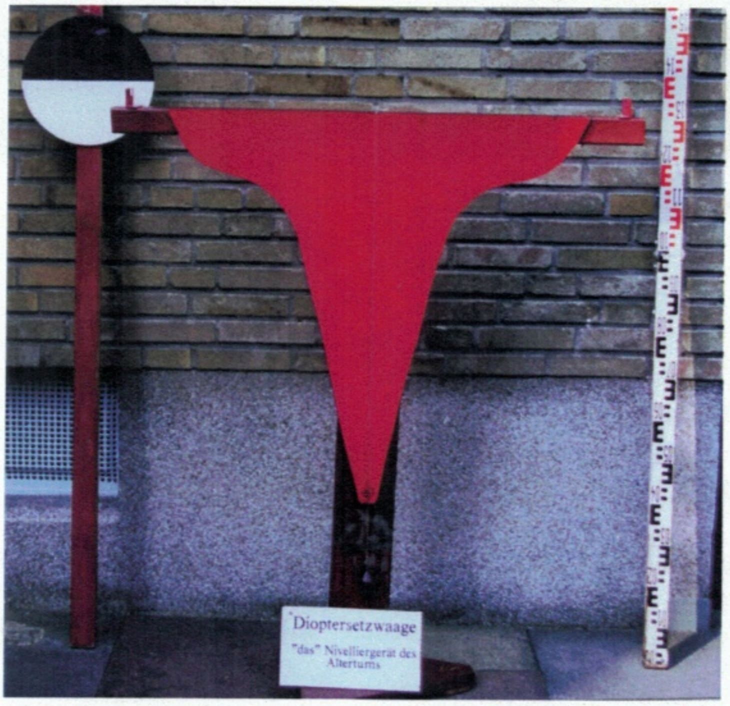


Bild 3: Setzwaagenivellier (hängende Waage)

Hauptkonstruktionselement ist die hängend (Bild 3) oder stehend (Bild 4) angebrachte Setzwaage. Da weder ein archäologischer Fund noch eine Beschreibung dieses Nivelliers vorliegen, wurde es in Anlehnung an die aus der Renaissance bekannten Geräte nachgebaut.

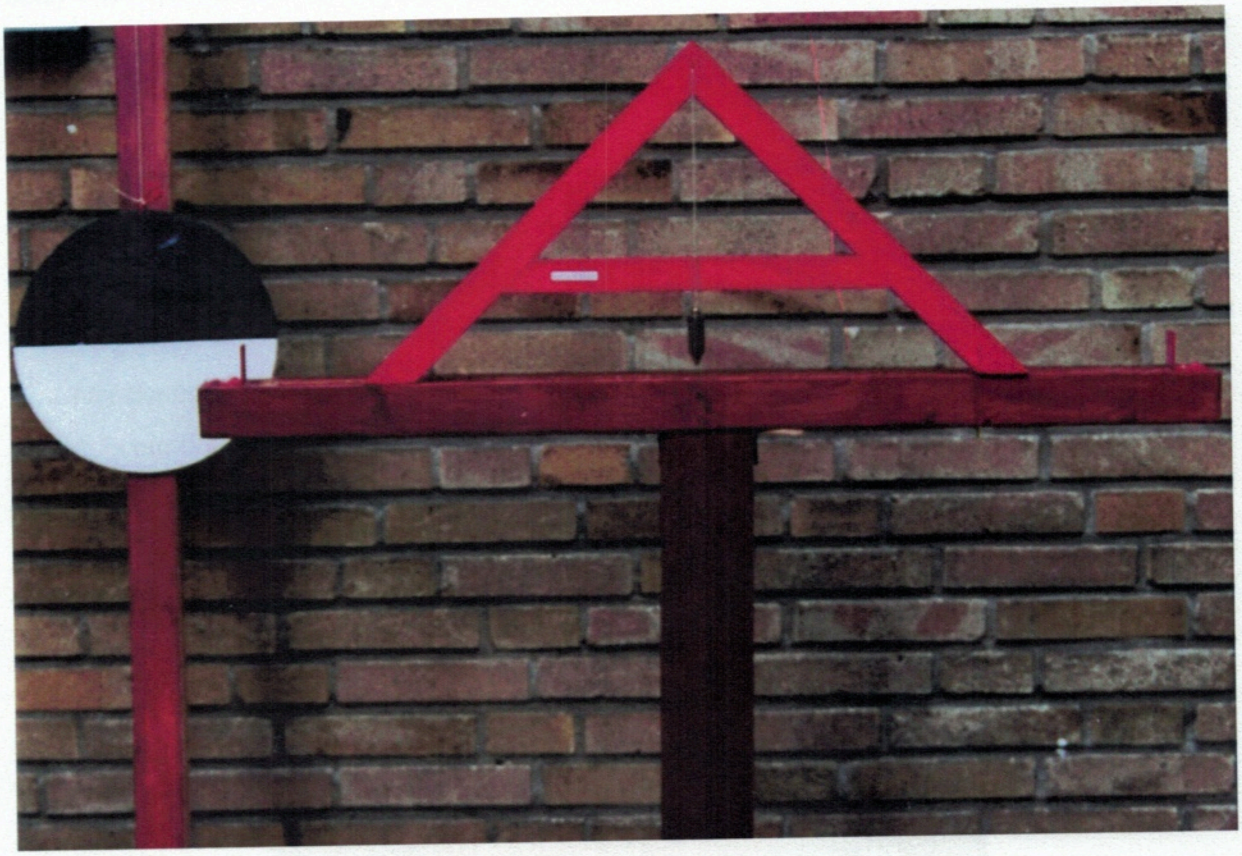


Bild 4: Setzwaagenivellier (stehende Waage)

Chorobat nach Vitruv

Vitruv bezeichnet den Chorobat als ein Nivelliergerät, das vermutlich beim Bau der römischen Wasserleitungen zum Einsatz kam. Die Konstruktion ist eine Verbindung von Setz- und Wasserwaage auf einem langen Richtscheit mit zwei Stützen (Bilder 5 und 6).

Die offene Wasserwaage tritt nur dann in Funktion, wenn starker Wind das Einpendeln der Lote verhindert. Mit dem langen Richtscheit und den Setzwaagen an den Enden des Geräts wollte der Baumeister wahrscheinlich die Genauigkeit steigern. Die Stützen und Streben müssen mit dem Richtscheit fest verbunden sein, damit bei Aufstellung des Geräts die Lote auf der Kerbmarke einpendeln. Der Einsatz dieses Geräts ist für Altertum und Renaissance nicht nachzuweisen. Das Gerät wurde entsprechend der ausführlichen Gerätebeschreibung von Vitruv (im 8. Buch seiner ´zehn Bücher über Architektur´) nachgebaut [3].

Bild 5: Chorobat (auf 4 m gekürzt)

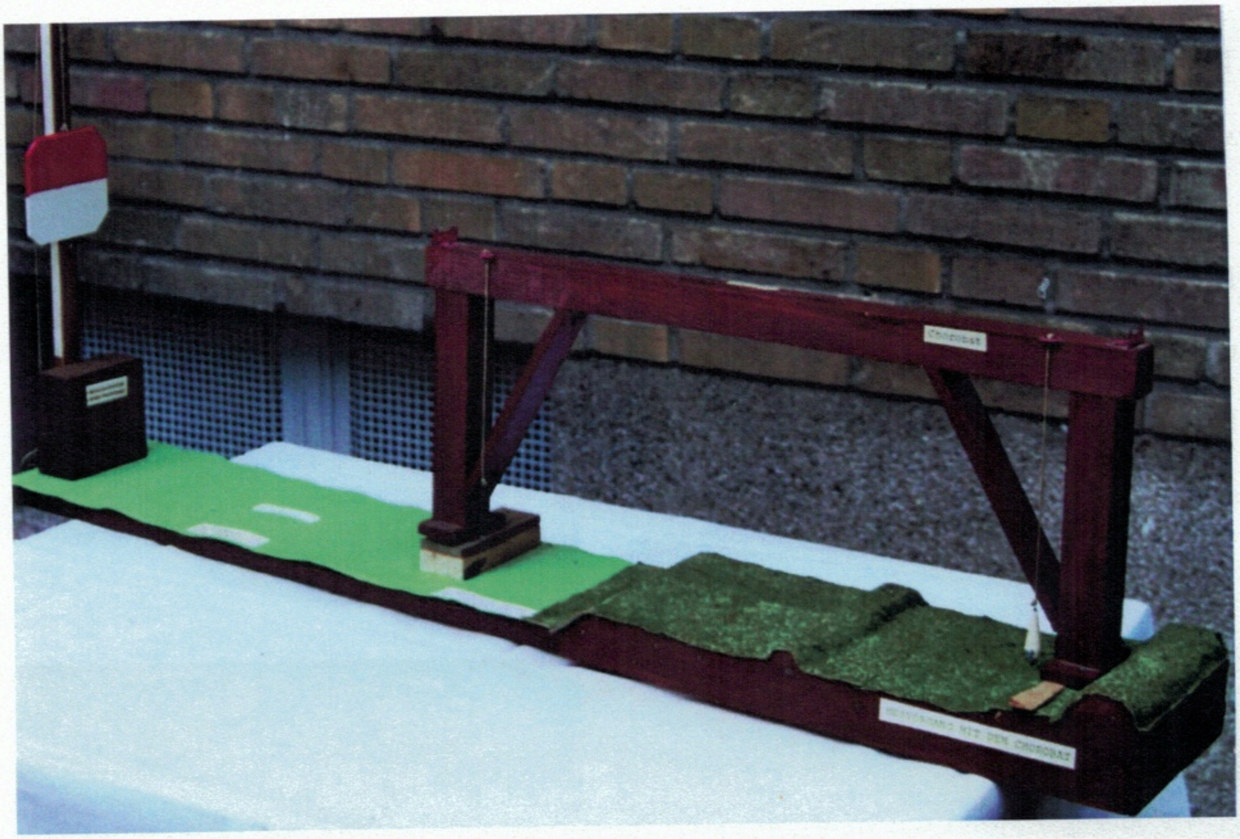


Bild 6: Chorobat mit Nivellierlatte beim Messvorgang

Dioptra nach Heron

Heron hat die altgriechische Messkunst in den Büchern „Metrika“ und „Dioptra“ zusammengefasst, die vollständig überliefert sind. Der Mechaniker Heron entwickelte mit der Dioptra ein Universalgerät, mit dem fast alle Messaufgaben gelöst werden könnten. Er beschreibt die Dioptra mit dem Zubehör bis ins kleinste Detail [5]. Die Dioptra ist wegen der komplizierten Bauweise nur von erfahrenen Mechanikern zu bauen. Sie ist (von der Konstruktion her) den damaligen Geräten weit voraus und gilt als Vorläufer des Theodolit [4] [11]. Zu dem Gerät gehören ein Höhenmaßstab und der Nivellieraufsatz (´Kanalwaage´), der nach dem Prinzip der kommunizierenden Röhren arbeitet (Bild 7).

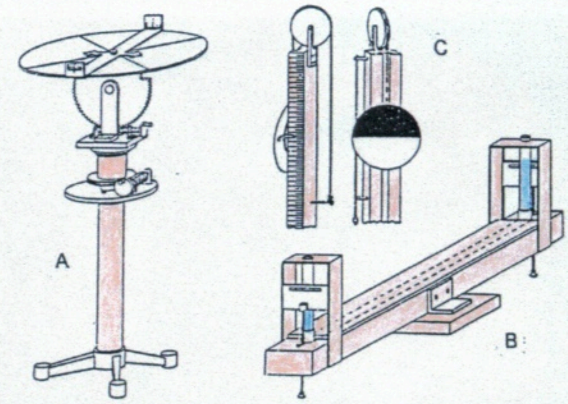


Bild 7: Herons Dioptra (A) mit
mit Nivellieraufsatz B und Nivellierlatte C

Bild 8: Nivellieraufsatz (Kanalwaage)

Die Kanalwaage (Bild 8) und der Höhenmaßstab (Bilder 2 und 3) wurden in Anlehnung an Herons Beschreibungen nachgebaut. Es gibt weder aus dem Altertum noch aus der Renaissance Hinweise, dass das ´Universalgerät´ jemals gebaut und eingesetzt wurde. Nur die Kanalwaage erscheint ab 1700 in der Fachliteratur. Der einzige bisher bekannte Nachbau befindet sich im Museum für Kunst und Kulturgeschichte Dortmund, Abt. Vermessungsgeschichte.

Nivelliergerät mit hängender Setzwaage

Das Gerät besteht aus Seil, Setzwaage, Stabstativen und Maßstab (Bild 9). Um ein leichtes

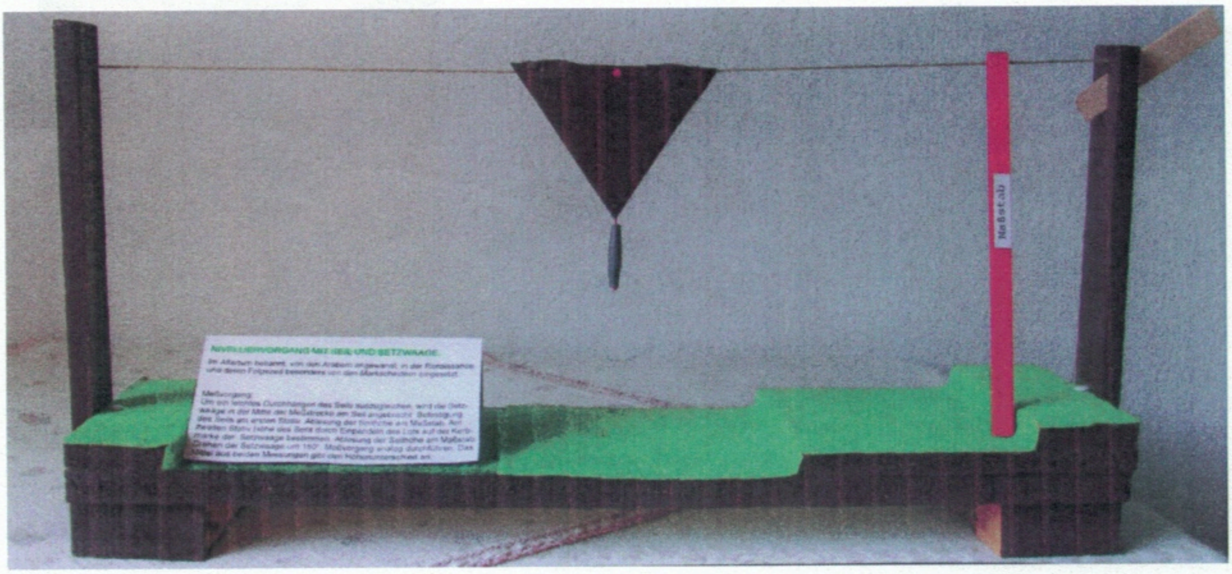


Bild 9: Nivelliervorgang mit am Seil hängender Setzwaage

Durchhängen des Seils auszugleichen, muss die Setzwaage in der Mitte des Seils angebracht sein. Das Gerät ist aus dem Altertum überliefert. Es wurde von den Arabern benutzt und in der Renaissance besonders von Markscheidern eingesetzt (´Hängezeug´) [1].

Staffelmessung

Beim Bau von Brücken, Aquädukten und Tunnels muss für die Planung bereits ein Gelände-Profil vorliegen. Mit den Nivelliergeräten ist eine Messung in steilem Gelände nur schwer durchzuführen. Für die Höhen- und Längenmessung setzte man daher im Altertum und noch bis zum 18. Jahrhundert die Staffelmessung ein. Dazu brauchte man Setzwaage, Richtscheit mit Längenskala, Stabstativ und Maßstab. Bild 10 zeigt den Messvorgang am Steilhang. Vorab ist die Achsrichtung des geplanten Bauwerks festzulegen [2] [12] [16] [17].

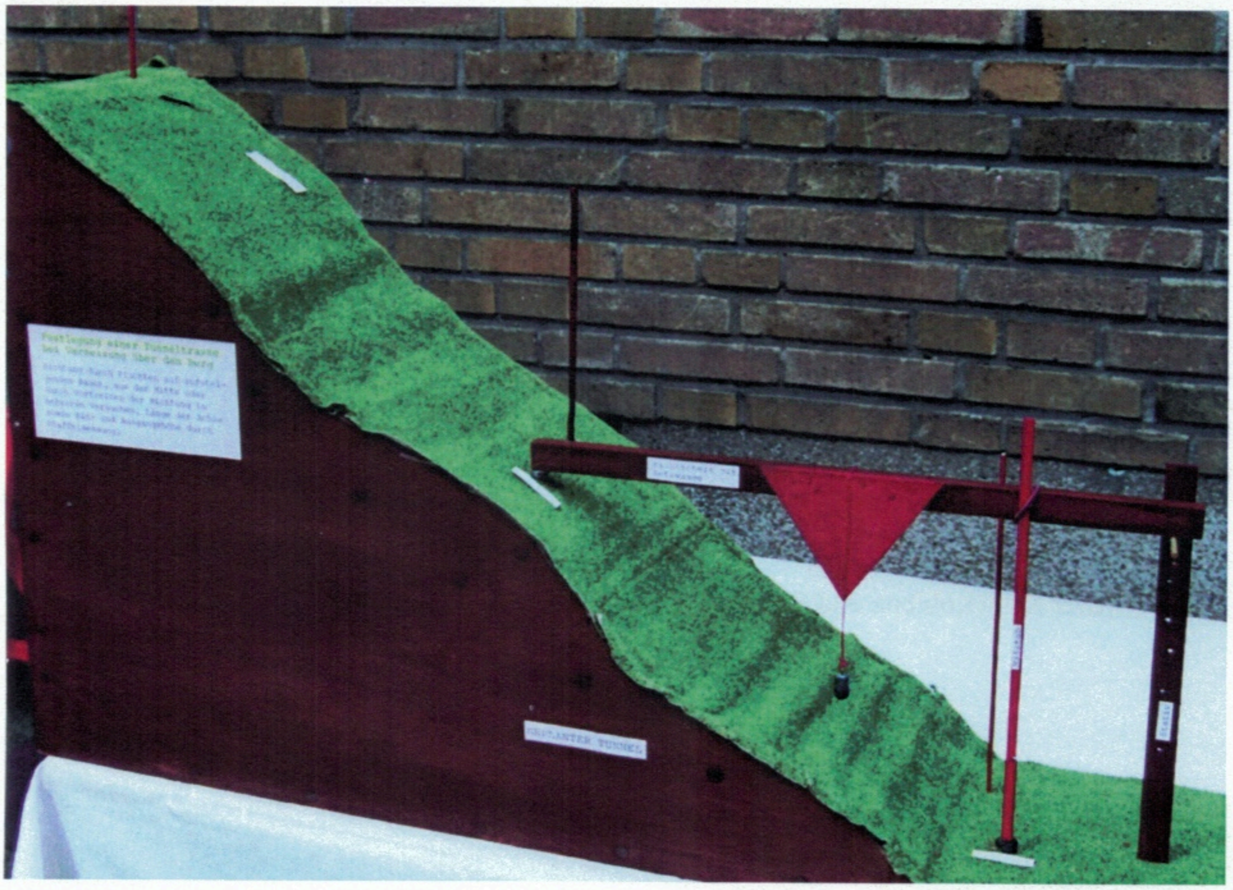


Bild 10: Staffelmessung beim Messvorgang

Winkelkreuz, Kreuzscheibe, Winkelkopf

In den alten Kulturen und noch bis zum 18. Jahrhundert waren die mit Stabdioptern versehenen Winkelkreuze und Kreuzscheiben die am häufigsten benutzten Geräte für die Rechtwinkelabsteckung [1]. Für den Messvorgang waren sie drehbar auf einem Stockstativ befestigt. Meist aus Holz gefertigt, waren die Geräte einfach herzustellen und besonders für den Einsatz in flachem Gelände geeignet [13]. Da aus dem Altertum kein archäologischer Fund bekannt ist, wurden die aus der Renaissance bekannten Geräte (Bild 11, A und B) nachgebaut.

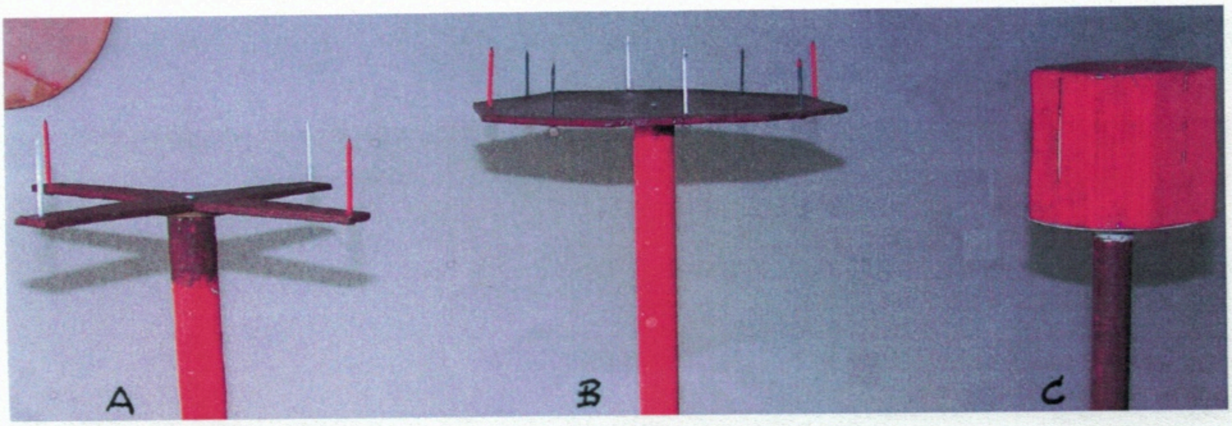


Bild 11: A = Winkelkreuz B = Kreuzscheibe C = Winkelkopf

Im Vergleich zu den beiden genannten Geräten (Winkelkreuz und Kreuzscheibe) ist der Winkelkopf wegen der Schlitzdiopter auch in steilem Gelände für Rechtwinkelabsteckungen geeignet (Bild 11 C). Von dem Winkelkopf sind bisher zwei archäologische Funde aus spätrömischer Zeit (Koblenz und Ennemain) bekannt [7] [13].

Die Groma aus Pompeji

Die Groma war das Spezialgerät der römischen Agrimensoren für die Absteckung von Rechtwinkeln. Bei der Limitation (Aufteilung des Nutzlandes durch Vermessung) sowie der Gründung von Lagern und Städten wurden die rechten Winkel mit der Groma (Bild 13)

abgesteckt. Mit der rasterförmigen Aufteilung des Nutzlands in Centurien sowie dem Nummerierungssystem entwickelten die römischen Landmesser bereits vor über 2000 Jahren ein Katastermodell nach rechtwinkligen Koordinaten [9] [10].

Die eigenartige Konstruktion (exzentrische Anbringung des Winkelkreuzes und hängende Lote als Zielvorrichtung) ermöglichte im Vergleich mit den Winkelkreuzen die Absteckung von Rechtwinkeln auch in steilem Gelände. Das Gerät war daher für die Absteckung von Brücken und Aquädukten geeignet. Es wurde in der Zeit von 300 v.Chr. bis 400 n.Chr. benutzt.

Entsprechend den Schriften der römischen Feldmesser und den in Pompeji ausgegrabenen Fragmenten [8] [9] [13] wurde die Groma nachgebaut (Bild 12).

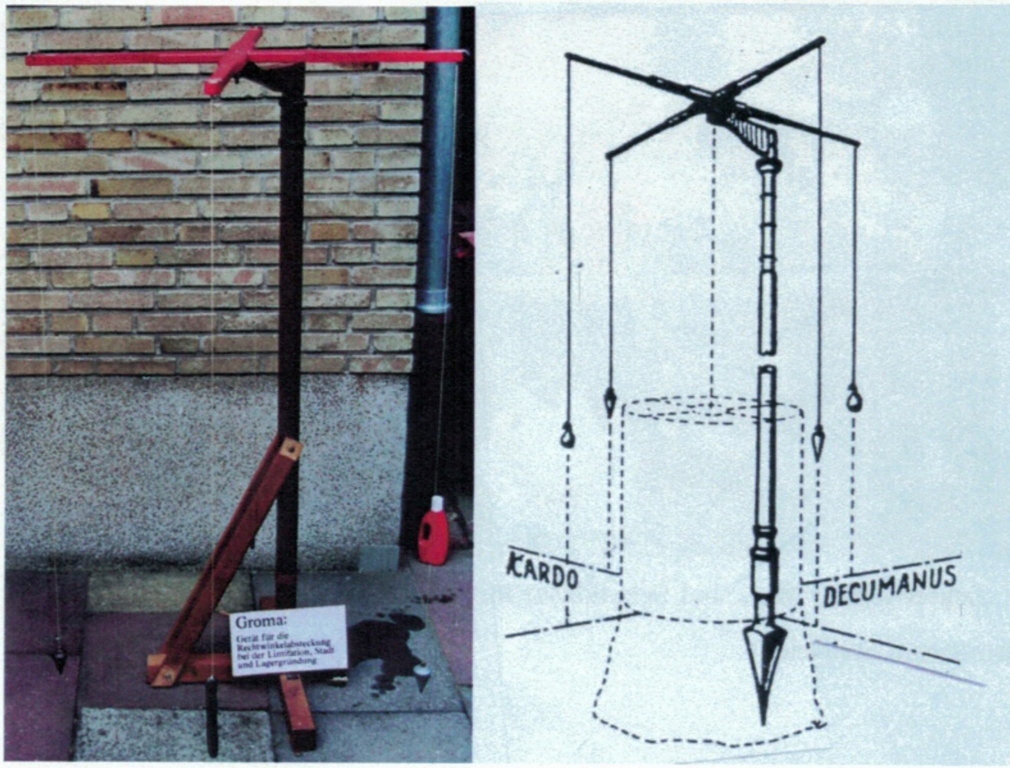


Bild 12: Pompeji-Groma

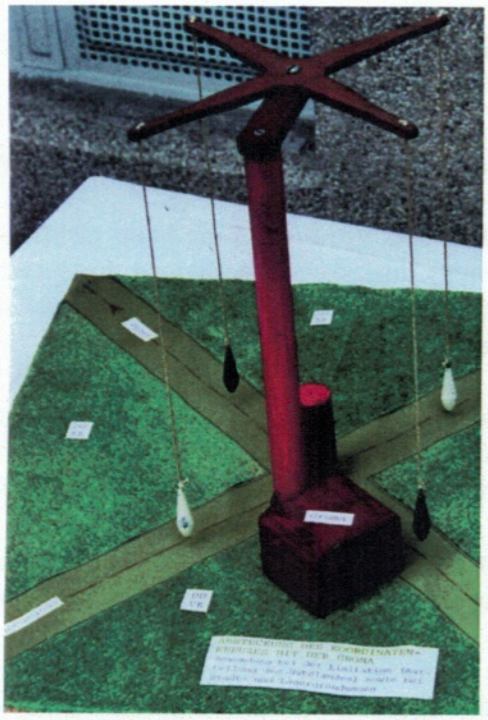


Bild 13: Rechtwinkelabsteckung mit der Groma

Bild 14: Lehrer Lothar Weis und Schulklasse mit meinen Unikaten (nachgebaute Messgeräte im Römermuseum Stettfeld)

Die Quellen für den Geräte-Nachbau

Kurze Angaben sowie Hinweise in der antiken Literatur.

- Die Bücher von Heron und Vitruv sind die hauptsächlichen Schriften, die die Mess- und Baukunst des Altertums umfassend überliefern. Entsprechend ist ihre Bedeutung für die Forschung. Das gilt besonders für die Bücher „Dioptra“ und „Metrica“ des Mechanikers Heron aus Alexandria.

- Die Schriften der römischen Agrimensoren („Corpus Agrimensorum Romanorum“, eine Sammlung der Feldmesser-Schriften aus der Zeit um 450 n.Chr.) bilden eine wertvolle Quelle für die Geschichte der Limitation und Bodenordnung.

- Gerätedarstellungen auf Bildern, Steinen und Grabstelen, von Malern und Steinmetzen ausgeführt, sind keine genauen, sondern mehr künstlerische Wiedergaben.

- Funde aus Metall, wie Lote, Messlattenschuhe, Fluchtstabspitzen, das Eisenkreuz aus Pfünz, Bauteile der ´Pompeji´-Groma und der Stativkopf aus Aquincum sowie aus Koblenz und Ennemain.

- Antike Bauwerke. Durch Neuvermessung werden sie zur überlieferten 'Geometrie in Stein'. Messdaten ermöglichen ihre Rekonstruktion und Genauigkeitsuntersuchungen. Die Genauigkeit ist ein Beleg für das Können der Baumeister und für die Qualität der eingesetzten Geräte.

- Die 'Araber' waren auch Bewahrer der alten Messkunst: Ihre Schriften, in der Frührenaissance bereits mehrfach übersetzt, enthalten bedeutende Angaben über Geräte und Messverfahren.

- In der Renaissancezeit wird sichtbar, was 2000 Jahre vorher im antiken Griechenland sowie in Alexandria erforscht und erkannt wurde. Ein Vergleich zeigt, dass zwischen vielen Geräten der Antike und denen der Renaissance Übereinstimmungen bestehen. Dadurch ist es möglich, aus dem Altertum nicht überlieferte Gerätedaten und -merkmale zu erkennen und für die Forschung und den Gerätenachbau zu nutzen.

Präsentation der Geräte

Die Messgeräte des Altertums wurden in Ausstellungen (Geräte und Schautafeln), Veröffentlichungen, Vorträge und Fernsehsendungen nicht nur Insidern, sondern auch einer interessierten Öffentlichkeit nahe gebracht.

Zudem befinden sich Nachbauten einzelner Geräte im Bestand mehrerer Museen:

Vermessungstechnisches Museum Dortmund
Kulturgeschichtliches Museum Nettesheim
Deutsches Straßenbau-Museum Germersheim
Leina-Museum Gotha
Römer-Museen in Haltern und Stettfeld
Deutsches Museum München

Zusammenfassung

- Die mit den nachgebauten Geräten durchgeführten Messproben bestätigen ihre Funktionsfähigkeit. Sie geben Hinweise über die mit diesen Geräten möglichen Messverfahren. Zudem zeigen sie, welche Genauigkeit damit zu erreichen ist.

- Die bei Großbauten festgestellte Genauigkeit belegt, dass zur Fehlerausschaltung in zwei Lagen gemessen wurde. Drehung des Geräts beim Nivellieren um 180° und bei der Rechtwinkelabsteckumg um 90°. Darum auch die unterschiedlichen Lotformen der Groma als Zielvorrichtung.

- Dioptra und Chorobat sind Geräte, von denen eine genaue Konstruktionsbeschreibung überliefert ist. Es gibt allerdings keinen Nachweis, dass sie im Altertum oder in der Renaissance zum Einsatz kamen.

- Die einfach zu fertigenden Setzwaage-Nivelliere waren die am häufigsten eingesetzten Nivelliergeräte im Altertum und noch im 18. Jahrhundert.

- Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts standen für die Gromaforschung neben den Schriften der römischen Agrimensoren nur einige künstlerische Darstellungen auf Grabstelen sowie wenige Fragmentfunde zur Verfügung. Erst die 1921 bei Ausgrabungen in Pompeji gefundenen Metallteile einer Groma ermöglichten eine einwandfreie Rekonstruktion dieses Geräts [8].

- Für die vielfältige Bautätigkeit (Monumentalbauten, Straßen, Aquädukte) sowie für die großflächigen Limitationen waren umfangreiche Vermessungen notwendig. Diese Arbeiten erforderten Fachkräfte und den Einsatz einfacher Messgeräte. Von solchen Geräten gibt es leider nur wenige Funde und Überlieferungen.

- Das reicht jedoch, um mit der Erfahrung eines Vermessungsingenieurs und der Auswertung der aus der Renaissance bekannten Literatur die Geräte, die zur Grundausstattung der Feldmesser und Baumeister gehörten, nachzubauen. Vielfach aus Holz gefertigt, waren sie - im Gegensatz zu Dioptra, Chorobat und Groma - einfach herzustellen und leicht zu handhaben.

Kein Feldmesser oder Baumeister hätte damals bei der Absteckung einfacher Bauwerke oder bei der Grundstücksvermessung eines der komplizierten Geräte eingesetzt.

Literatur

[1] Schmidt, F.: Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. Neustadt a.d. Haardt 1935. Stuttgart 1988.
(Mit fast 1400 Quellen- und Literaturangaben. Eine umfassende Bestandsaufnahme der alten Messkunst.)

[2] Peters, K.: Nivelliergeräte des Altertums.
In: Der Vermessungsingenieur. 1987. S. 97.

[3] Stürzenacker, E.: Vitruv. De Architectura. Essen 1938.

[4] Peters, K.: Die Dioptra des Heron.
In: Der Fluchtstab. 1960. S. 21.

[5] Schöne, H.: Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra. (3. Band von Herons Werken) Leipzig 1903.

[6] Peters, K.: Das Winkelkreuz der römischen Landmesser.
In: Der Fluchtstab. 1961. S. 129.

[7] Günther, A.: Römisches Landmesserinstrument aus Koblenz.
In: Germania. 1931. S. 271.

[8] Della Corte, M.: Groma. In: Monumenta Antichi XXVIII, Milano 1922.

[9] Blume, F., Lachmann, K.., Rudorff, A.: Die Schriften der römischen Feldmesser.
Hildesheim 1967.

[10] Peters, K.: Limitatio – die Katastervermessung im Imperium Romanum.
In: Der Vermessungsingenieur. 1988. S. 25.

[11] Peters, K.: Von Heron bis Apian.
In: Globulus. 1995. S. 39.

[12] Peters, K.: Mess- und Absteckverfahren beim Tunnelbau im Altertum.
In: Der Vermessungsingenieur. 1991. S. 248.

[13] Peters, K.: Messgeräte des Altertums. Nachbau • Experimente • Genauigkeit. Dortmund 2002.

[14] Peters, K.: Die große Pyramide bei Giseh. Maße – Planung – Absteckung. Dortmund 1998.

[15] Peters, K., Peters, W.: Bogenabsteckung in der Antike am Beispiel des Pantheons in Rom. In: Der Vermessungsingenieur. 1993. S. 76.

[16] Peters, K.: Der Claudiustunnel – ein bedeutendes Bauwerk aus altrömischer Zeit. In: Der Vermessungsingenieur. 1994. S. 306.

[17] Peters, K.: Der Tunnel – das Eupalineion auf der Insel Samos. Dortmund 1984.

[18] Peters, K.: Der Orthogonal-Polygonzug nach Heron. (Eine Analyse der Heronschen Aufgabe im Zusammenhang mit der Absteckung des Eupalinostunnels auf Samos.) In: Der Vermessungsingenieur. 1988. S. 189.

Bilder